



KUBIESE GRAFIEK

Die standaard vorm van die kubiese funksie is $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. Vorm:

Die waarde van a beïnvloed die vorm van die grafiek.

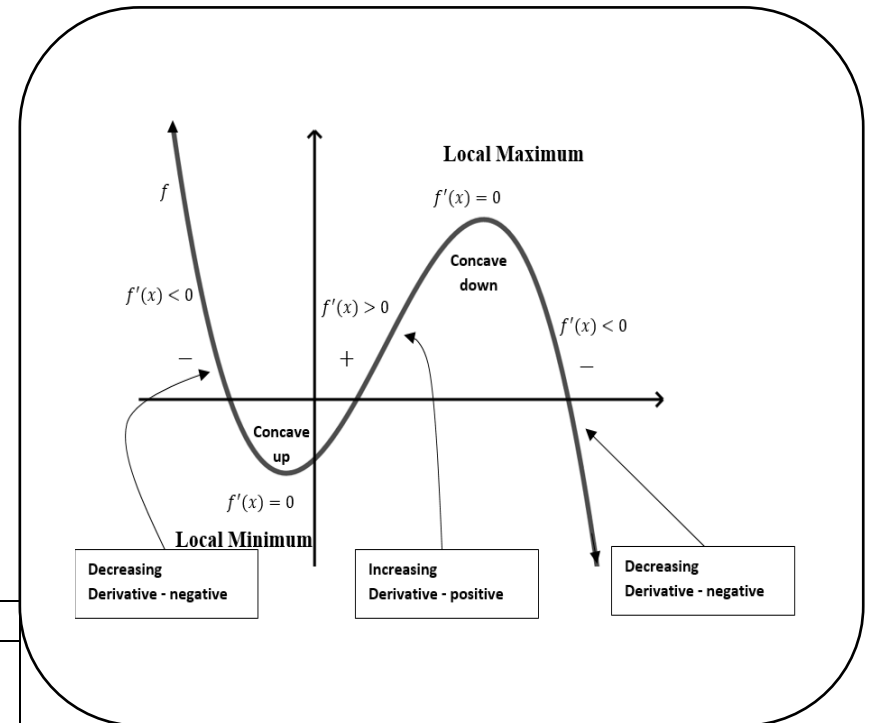
As $a > 0$ [positiewe waarde]	As $a < 0$ [negatiewe waarde]
	

2. Afsnitte: Points where the graph intersects the axes

x -afsnit	y -afsnit
Laat $y = 0$ en los op vir x deur die faktor stelling.	Laat $x = 0$ en los op vir y .

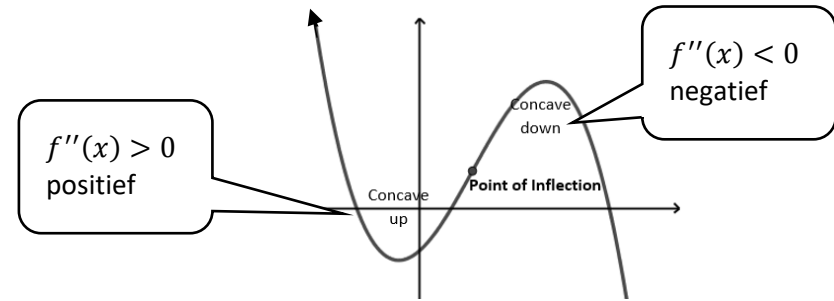
3. Draaipunte, word nou verwys as STASIONÊRE PUNTE

x - koördinaat van stasionêre punt	y - koördinaat van stasionêre punt
$f'(x) = 0$ en los op vir x	Vervang die x - koördinaat van stasionêre punt in die oorspronklike funksie en los op vir y .



'n Kubiese funksie het 'n spesiale punt genoem die **Punt van Infleksie**
Dit is die punt waar die grafiek verander van konkaf op na konkaf af en andersom.

x – koördinaat van die Punt van Infleksie	y –coordinate of Point of Inflection
$f''(x) = 0$ en los op vir x .	Vervang die x - koördinaat van die Punt van Infleksie in die oorspronklike funksie en los op vir y .



Die konsepte sal deur die volgende voorbeelde uitgepak word.

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE

Voorbeeld 1: Gegee:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$$

- (a) Skets die grafiek van $f(x)$
- (b) Bepaal die koördinate van die punt van infleksie

Oplossing:

(a) Vorm: $a = 2$ dus



Faktor stelling:
Laat $x = -1$:
 $f(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 3$
 $= -2 - 5 + 4 + 3 = 0$
Dus is $x + 1$ 'n faktor

Wortels

Afsnitte:

x – afsnitte:

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x + 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0$$

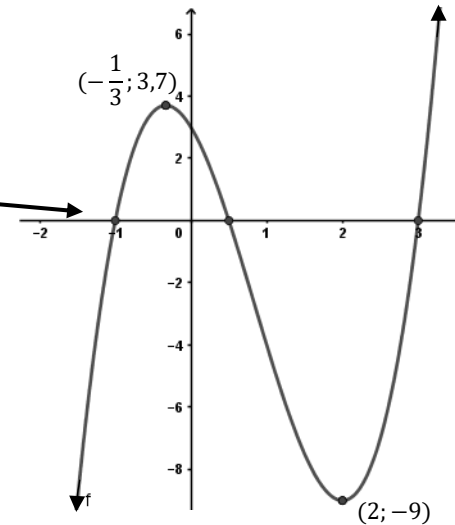
$$(x + 1)(2x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1 \text{ of } x = \frac{1}{2} \text{ of } x = 3$$

Laat $x = 0$:

y – afsnit: $y = 3$

Skets





Stasionêre punte

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 10x - 4 = 0$$

$$2(3x^2 - 5x - 2) = 0$$

$$2(3x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{3} \quad \text{of} \quad x = 2$$

y - koördinaat van stasionêre punte

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 3$$

$$= \frac{100}{27} = 3,7$$

$$f(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 - 4(2) + 3 = -9$$

$$\text{Stasionêre punte : } \left(-\frac{1}{3}; 3,7\right) \quad \text{en} \quad (2; -9)$$

(b) Punt van infleksie:

$$f''(x) = 0$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x - 4$$

$$f''(x) = 12x - 10$$

$$f''(x) = 0$$

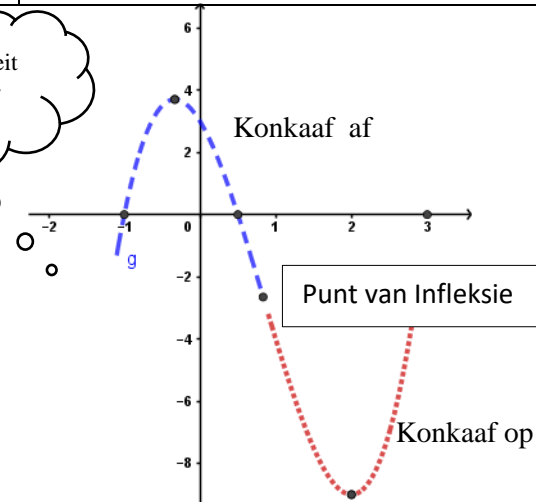
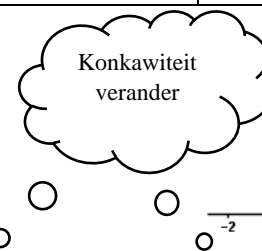
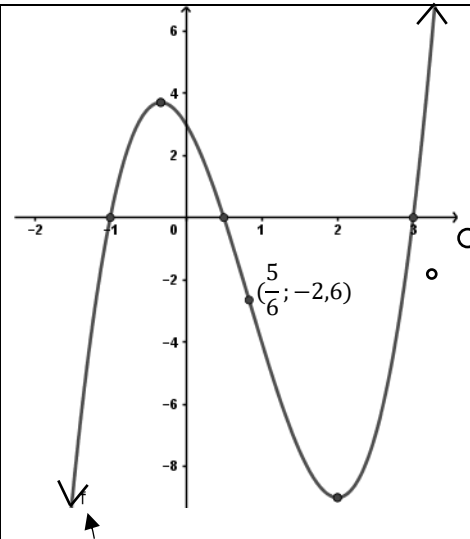
$$12x - 10 = 0$$

$$12x = 10$$

$$x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$f\left(\frac{5}{6}\right) = 2\left(\frac{5}{6}\right)^3 - 5\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{5}{6}\right) + 3 = -2,6$$

Ons benodig nie die inligting om die grafiek te teken nie.



Voorbeeld 2:

Skets die funksie van $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$

Oplossing:

Vorm: $a = -1$ dus

Afsnitte:

x - afsnitte:

$$-x^3 + 6x^2 - 9x = 0$$

$$-x(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$-x(x - 3)(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ or } x = 3$$

y - afsnit:

$$y = 0$$

Stasionêre punte:

$$g'(x) = -3x^2 + 12x - 9$$

$$g'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 12x - 9 = 0$$

$$-3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$-3(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \text{ or } x = 1$$

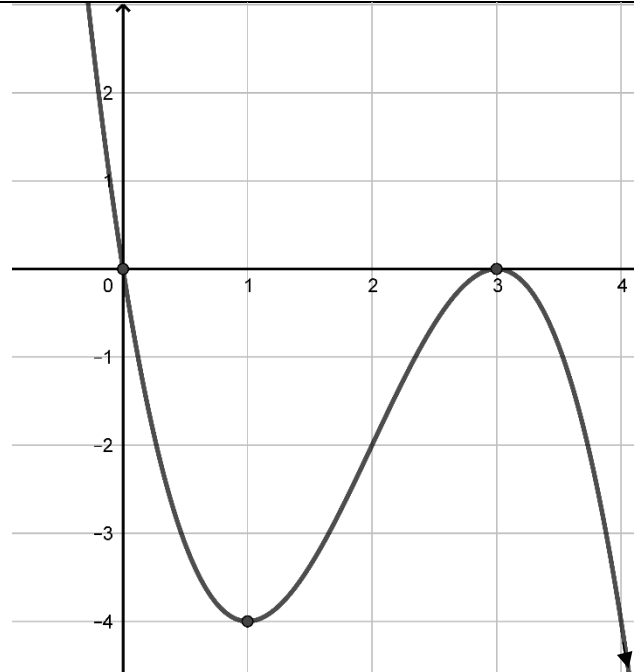
y - koördinaat van stasionêre punt :

$$g(3) = -(3)^3 + 6(3)^2 - 9(3) = 0$$

$$g(1) = -(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) = -4$$

Koördinate van stasionêre punte :

$$(3; 0) \text{ en } (1; -4)$$



KAN JY?

Skets die volgende kubiese funksies:

[Toon alle afsnitte en stasionêre punte]

(a) $y = x^3 + 14x^2 - 49x + 36$

(b) $y = x^3 - 5x - 8x + 12$

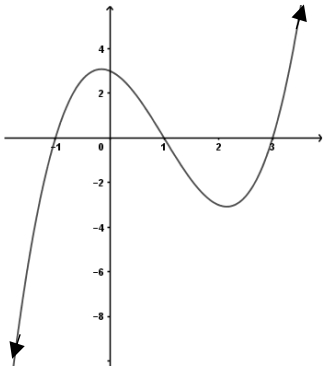
(c) $y = x^3 - 4x^2 + 4x$

(d) $y = x(x - 1)(x + 1)$

Opsomming: Daar is 4 tipes opsies van sketse

Tipe 1

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

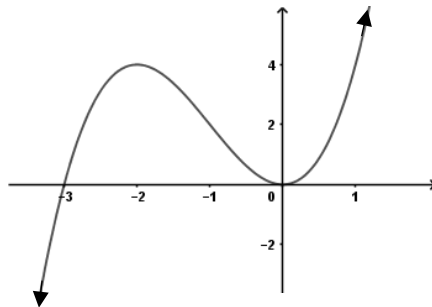


Drie x –afsnitte/ wortels

Twee draaipunte

Tipe 2

$$y = x^3 + 3x^2$$



Twee x –afsnitte/ wortels

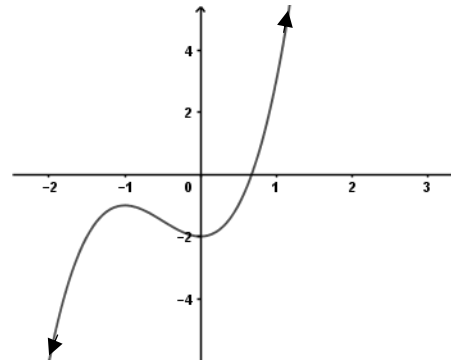
Twee draaipunte

Nota:

Ons het 2 gelyke wortels by $x = 0$

Tipe 3

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 2$$

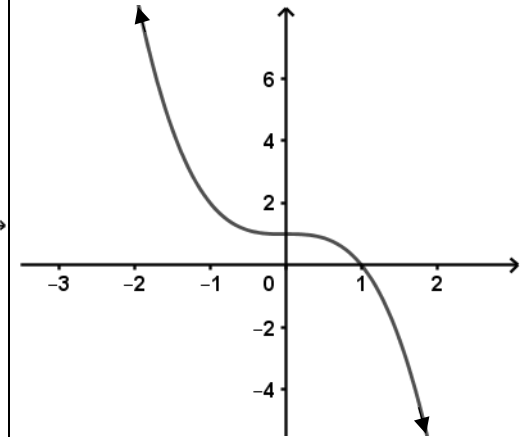


Een x –afsnit/ wortel

Twee draaipunte

Tipe 4

$$y = -x^3 - 2$$



Een x –afsnit

Een stasionêre punt (geen draaipunt maar 'n
Punt van infleksie)

Bepaling van die vergelyking van 'n Kubiese funksie

Gegee drie wortels en nog 'n punt

Gebruik die formula:

$y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ waar r_1 ; r_2 en r_3 die wortels is.

- Vervang die wortels en vereenvoudig sover as moontlik.
- Vervang die ander punt en bepaal die waarde van a .

Gegee die draaipunt en twee ander punte

Begin met :

- Afgeleide = 0 by die draaipunt
- Vervang die ander punt



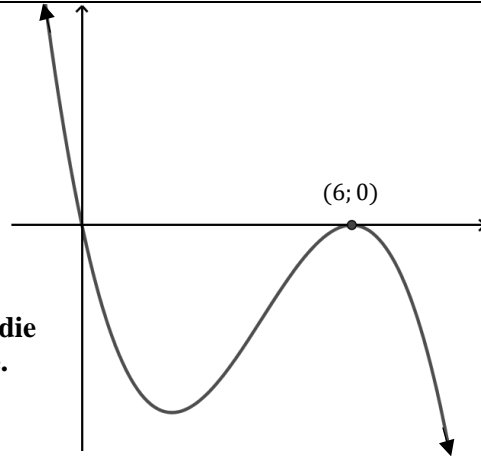
Voorbeeld 3

Gegee:

$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$
en die skets,

(a) bepaal die waardes van a , b
en c .

(b) Bepaal die koördinate van A, die
lokale minimum van die kurwe.



Oplossing:

(a) $y = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$

$f(x) = -(x - 0)(x - 6)(x - 6)$

$f(x) = -x(x^2 - 12x + 36)$

$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

$\therefore a = 12; b = -36$ en $c = 0$

$a = -1$

Wortels: 0; 6; 6

Gelyke wortels by 6

$y = 0$

(b) $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

$f'(x) = -3x^2 + 24 - 36$

$f'(x) = 0$

$-3x^2 + 24x - 36 = 0$

$-3(x^2 - 8x + 12) = 0$

$-3(x - 6)(x - 2) = 0$

$x = 6$ or $x = 2$

y - waarde by $x = 2$.

$f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x$

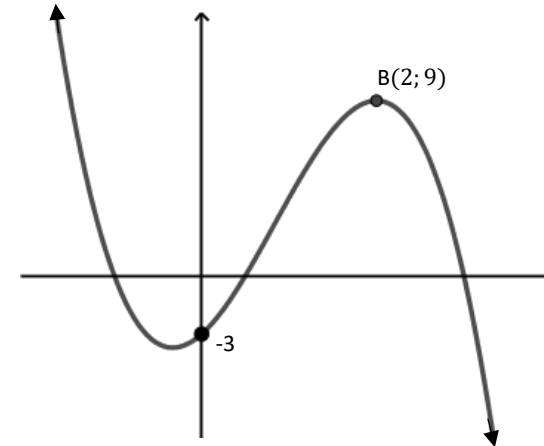
$f(x) = -(2)^3 + 12(2)^2 - 36(2) = -32$

A(2; -32)

Die draaipunt by $x = 6$ was
gege. Die x -koördinaat
van A is 2.

Voorbeeld 4

Die skets hieronder is gedefinieer deur $p(x) = ax^3 + 5x^2 + 4x + d$. Bepaal die
waardes van a en d .



Oplossing:

$y = ax^3 + 5x^2 + 4x + d$

$\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 10x + 4$

At $x = 2, \frac{dy}{dx} = 0$

$3ax^2 + 10x + 4 = 0$

$3a(2)^2 + 10(2) + 4 = 0$

$12a + 20 + 4 = 0$

$12a = -24$

$a = -2$

$\therefore y = -2x^3 + 5x^2 + 4x + d$

$d = -3$

$y = -2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$

x waarde by draaipunt is 2.
Vervang in die afgeleide

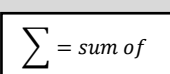
Grafiek sny y -as by -3

STATISTIEK:

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE:

Maatstawwe van verspreiding

Gemiddelde (\bar{x})

- Die som van al die waardes (x) van die datastel gedeel deur die aantal waardes in die datastel (n).
- $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ 

Kwartiele

- Verdeel geordende data in kwarte..
- Onderste kwartiel (Q_1) : Die posisie van $Q_1 = \frac{1}{4}(n + 1)$.
- Mediaan (Q_2) : Die posisie van $Q_2 = \frac{1}{2}(n + 1)$
- Boonste kwartiel (Q_3) : Die posisie van $Q_3 = \frac{3}{4}(n + 1)$.

Modus

Die klasinterval met die hoogste frekwensie.

Variasiewydte

Maksimum waarde – Minimum waarde.

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Semi – Interkwartielvariasiewydte

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Maatstawwe van sentrale neiging (geordende data)

Voorbeeld 1:

Bepaal die geskatte gemiddelde, mediaan en modus van die onderstaande data.

Klasinterval	Frekwensie	Middelpunt van klasinterval	Frekwensie × Middelpunt
$0 \leq x \leq 20$	6	10	60
$20 < x \leq 40$	8	30	240
$40 < x \leq 60$	10	50	500
$60 < x \leq 80$	3	70	210
$80 < x \leq 100$	2	90	180
	29		1190

Berekening avn geskatte gemiddeld:

1. Skep addisionele kolomme vir **Middelpunt van klasinterval** en **Frekwensie × Middelpunt**.

2. Bereken die **Middelpunt van klasinterval** en **Frekwensie × Middelpunt**.

2.1 **Middelpunt van klasinterval** =

$$\frac{\text{Onderste limiet van klas} + \text{boonste limiet van klas}}{2}$$

2.2 Vermenigvuldig die frekwensie kolom met die middelpunt van elke klasinterval.

3. Bereken die som van die **Frekwensie** kolom om “n” te vind.

4. Bereken die som van **Frekwensie × Middelpunt** kolom om “ $\sum x$ ” waarde te vind.



KAN JY?

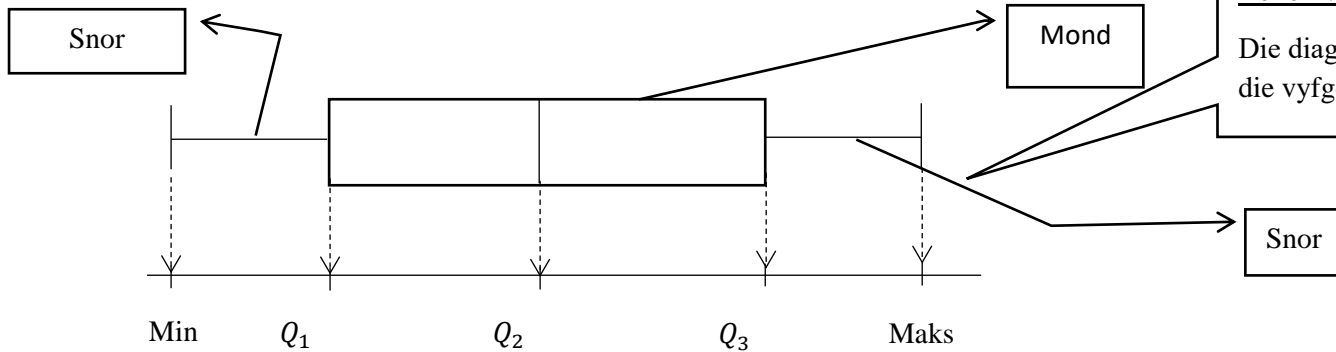
Bepaal die geskatte gemiddelde, mediaan en modale interval van die onderstaande data.

Klasinterval	Frekwensie
$0 \leq x \leq 10$	1
$10 < x \leq 20$	2
$20 < x \leq 30$	11
$30 < x \leq 40$	9
$40 < x \leq 50$	14
$50 < x \leq 60$	3

<p>Oplossing: Gemiddeld $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1190}{29} = 41,03$ Mediaan Posisie van $Q_2 = \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}(29 + 1) = 15^{de}$ waarde. Die 15^{de} waarde val in $40 < x \leq 60$ klasinterval. $\therefore Q_2 = 50$ (middelpunt van klasinterval) Modus = $40 < x \leq 60$</p>		<p>5. Vervang stap 3 en 4 in $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ om geskatte gemiddeld te kry.</p> <p>Mediaan</p> <ul style="list-style-type: none"> Bepaal die posisie van Q_2. Bepaal in watter klasinterval die posisie van Q_2 val. Gebruik die klasmiddelpunt vir die waarde van Q_2. 	<p>Antwoorde: Geskatte gemiddelde 35,5 mediaan : 35 modale interval $40 < x \leq 50$</p>
<p>Voorbeeld 2: Bepaal die onderste kwartiel, boonste kwartiel, variasiewydte, interkwartielvariasiewydte, semi - interkwartielvariasiewydte en die 80^{ste} persentiel van die onderstaande data. 20, 21, 25, 25, 26, 26, 26, 30, 32, 32, 33, 33, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 45</p>			
<p>Oplossing</p>			
<p>Onderste kwartiel (Q_1) Die posisie van $Q_1 = \frac{1}{4}(n + 1)$ $= \frac{1}{4}(20 + 1) = 5,25^{de}$ posisie. $\therefore Q_1 = \frac{26 + 26}{2} = 26$</p>	<p>Boonste kwartiel (Q_3) Die posisie van $Q_3 = \frac{3}{4}(n + 1)$ $= \frac{3}{4}(20 + 1) = 15,75^{th}$ posisie. $\therefore Q_3 = \frac{37 + 38}{2} = 37,5$</p>	<p>80^{ste} persentiel Die posisie van $80^{ste} = \frac{80}{100}(20 + 1) = 16,8^{ste}$ posisie. $\therefore 80^{ste}$ persentiel = $\frac{38+41}{2} = 39,5$</p>	
<p>Variasiewydte = $45 - 20 = 25$</p>	<p>IQR = $Q_3 - Q_1 = 37,5 - 26 = 11,5$</p>	<p>Semi - IQR = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{37,5 - 26}{2} = 5,75$</p>	
<p>Die vyfgetal opsomming Die vyfgetal opsomming word voorgestel deur die volgende maatstawwe van verspreiding:</p> <ul style="list-style-type: none"> ❖ Die minimum waarde van die datastel. ❖ Q_1 ❖ Q_2 ❖ Q_3 ❖ Die maksimum waarde van die datastel. 		<p>Uitskieters Dit is waardes wat baie groter of kleiner is as die gegewe data items</p>	

Mond- en - snor diagram

Die mond – en – snor diagram is die grafiese voorstelling van die vyfgetal opsomming.



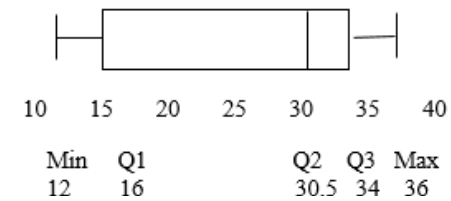
Teken wenke

Die diagram moet altyd 'n mond en 'n snor hê. Toon die vyfgetal opsomming duidelik op die as aan.

Belangrike gevolgtrekkings van af die mond – en – snor digram.

- 25% van die data lê tussen die minimum waarde en Q_1 .
- 25% van die data lê tussen Q_1 en Q_2 .
- 25% van die data lê tussen Q_2 en Q_3 .
- 25% van die data lê tussen Q_3 en die maksimum waarde.

Antwoord



KAN JY?

Teken 'n mond – en – snor diagram van die onderstaande data.

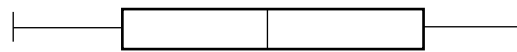
12, 12, 13, 14, 16, 22, 23, 24, 30, 31, 31, 31, 32, 34, 35, 35, 35, 36

Verspreiding van data

Positief skeef



Simmetriese verspreiding

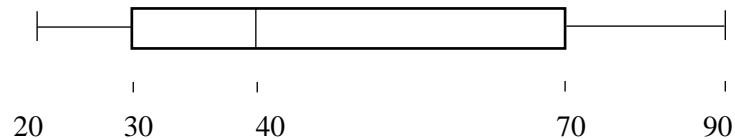


Negatief skeef



Voorbeeld 4:

Die mond – en – snor diagram vir punte (uit 90) vir nege leerders word in onderstaande diagram getoon.



Beantwoord die volgende vrae.

1. Lewer kommentaar oor die skeefheid van die data.
2. Hoekom sal die gemiddelde nie 'n goeie maatstaf van sentrale neiging wees nie?
3. Dink jy die toets was te maklik of te moeilik? Gee 'n rede vir jou antwoord. answer.

Oplossing:

1. Skeef na regs of positief skeef.
2. Die gemiddelde was te hoog.
3. Die toets was te moeilik want 50% van leerders het minder as 40% gekry.

KAN JY?

Die onderstaande data toon die aantal besoeke aan die plaaslike kliniek vir die afgelope 6 dae : 12, 29, 13, 63, 12, 3

1. Teken 'n mond – en – snor diagram.
2. Gebruik jou sakrekenaar om die gemiddelde van die data te bepaal.
3. Bereken die gemiddelde – mediaan.
4. Lewer kommentaar oor die skeefheid van die data.

Antwoorde

2. gemiddelde $\approx 14,1$
3. gemiddelde - mediaan = $14,1 - 17,5 = -3,4$
4. Die data is nouer gegroepeer aan die regterkant en meer verspreid aan die linkerkant.. Dit is negatief skeef. Die verskil tussen die gemiddelde en die mediaan is negatief wat aandui dat die data negatief skeef is.

Kumulatiewe frekwensie grafiek (ogief)

Definisie:

Dit is die totale frekwensie en alle frekwensies tot dusver in 'n frekwensie verspreiding. Dit is die “lopende totaal” van frekwensies.

Wat moet ek kan doen?

- Gebruik die frekwensietabel om 'n ogief te teken.
- Bepaal waardes deur gebruik te maak van 'n ogief.
- Gebruik 'n ogief om die frekwensietabel te voltooi.
- Gebruik die ogief om persentiele en kwartiele te bereken.

Wat is belangrik wanneer 'n ogief geteken word?

1. Dit moet 'n opskrif hê.
2. Die asse moet benoem word.
3. Plot die punte. (Boonste grens van klas; kumulatiewe frekwensie van klas)
4. ANKER die ogief by (onderste grens van die eerste interval; 0)

Wanneer jy die kurwe skets mag jy nie 'n liniaal gebruik nie. Dit is 'n S – vormige

Voorbeeld 5:

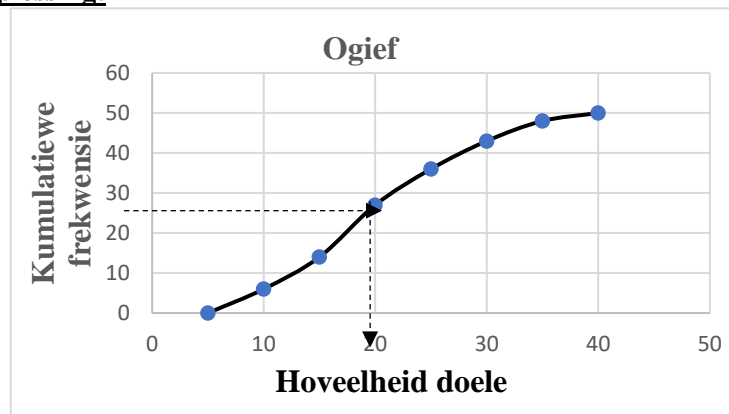
Die volgende frekwensietabel toon die hoeveelheid doele wat die Protea netbalspan aangeteken het in die 50 wedstryde wat hulle gespeel het in 2018.

Hoeveelheid doele	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie	Koördinate
$5 < x \leq 10$	6	6	(10 ; 6)
$10 < x \leq 15$	8	14	(15 ; 14)
$15 < x \leq 20$	13	27	(20 ; 27)
$20 < x \leq 25$	9	36	(25 ; 36)
$25 < x \leq 30$	7	43	(30 ; 43)
$30 < x \leq 35$	5	45	(35 ; 45)
$35 < x \leq 40$	2	50	(40 ; 50)

1. Teken die kumulatiewe frekwensie grafiek(ogief) van die gegewe data.
2. Gebruik die grafiek om die mediaan te bepaal.

Oplossing:

1.



2. Posisie van $Q_2 = \frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}(50 + 1) = 25,5^{ste}$ waarde. $\therefore Q_2 = 19$

Riglyne om 'n ogief te skets.

1. Skep 'n kumulatiewe frekwensie kolom.
2. Skep 'n koördinate kolom.
3. Anker ogief by (onderste grens; 0).
4. Plot punte in koördinate kolom.
5. Konnekteer die punte met gladde kurwe.

Hoe word kwartiele en persentiele grafies bepaal.

1. Vind die posisie.
2. Vind die posisie op die kumulatiewe frekwensie as.
3. Teken 'n gebroke lyn na die ogief.
4. Teken 'n gebroke lyn van die ogief na die $x -$ as.
5. Lees die waarde van die $x -$ as af.

KAN JY?

'n Steekproef is gedoen op 50 mense om die afstande te bepaal wat hulle daaglik na hul werk reis. Die volgende tabel toon die resultate van die steekproef:

Afstand in km	Frekwensie
$0 < d \leq 5$	2
$5 < d \leq 10$	7
$10 < d \leq 15$	4
$15 < d \leq 20$	13
$20 < d \leq 25$	16
$25 < d \leq 30$	8

1. Teken die kumulatiewe frekwensie grafiek(ogief) van die gegewe data.
2. Gebruik die grafiek om die 60^{ste} persentiel te bepaal.
3. Gebruik jou grafiek om die geskatte aantal mediaan kilometers wat gereis was per week te bepaal.

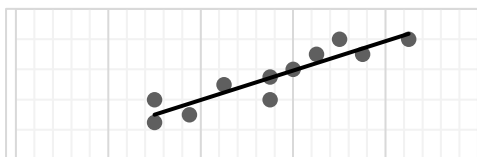
Antwoorde: (2) ≈ 54 (3) Mediaan tussen 25ste en 26steleerderr ≈ 50 km per week

KONSEPTE EN VAARDIGHEDE:

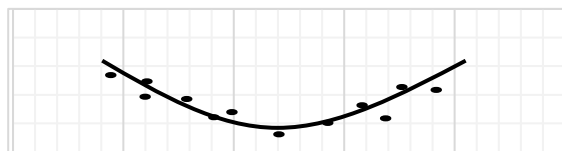
Spreadingsdiagramme

‘n Spreading diagram is ‘n grafiek wat gebruik word om te bepaal of daar ‘n verhouding tussen twee veranderlikes is. ‘n Spreadingdiagram is ‘n kragtige hulpmiddel vir navorsers om te bepaal of daar ‘n verband tussen twee veranderlikes bestaan. Die data op ‘n Spreadingdiagram kan die volgende neiging hê: lineêr, kwadratiese of eksponensieël.

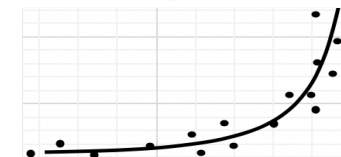
Lineêr



Kwadratiese



Eksponensieël



Regressielyn

Die regressielyn is basies die akkurate weergawe van ‘n lyn van beste passing. Dit gebruik die kleinste kwadrate metode om die gradiënt en y – afsnit te bepaal van die regressielyn

Standaardvorm van ‘n regressielyn: $y = A + Bx$

Hoe om die vergelyking van die regressielyn te bepaal met ‘n Casio fx-82ZA sakrekenaar:

1. Druk MODE en selekteer STAT.

2. Selekteer $A + Bx$.



<https://youtu.be/ABN4iJL04qs>

3. Vul data punte in.

Kolom(X) druk = na elke data punt

Kolom(Y) druk= na elke data punt

4. Na al die data punte ingevul is druk AC

5. Druk SHIFT , druk dan 1

6. Druk die nommer langs “Reg”

7. Druk die nommer langs A , dan druk =: om A te vind

8. Druk SHIFT , druk dan 1

9. Druk die nommer langs “Reg”

10. Druk die nommer langs B , druk =: om B te vind.

Hoe om die vergelyking van die regressielyn te bepaal met behulp ‘n Sharp calculator (EL-W535HT)

1. < MODE > [1:STAT][1:LINE]

2. Vul x -waardes en die y -waardes tesame.

3. Druk CHANGE na elke $(x; y)$

4. Vind die waarde van a , die y -afsnit [ALPHA][()] [=]

5. Vind die waarde van b , die gradiënt [ALPHA] [)] [=]

Lyn van beste passing

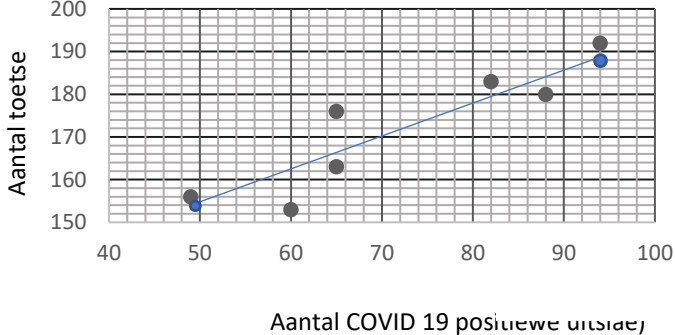
Dit verwys na ‘n lyn wat deur ‘n verspreidings diagram se data gaan wat die data die beste voorstel. Die lyn van beste passing is nie so akkuraat nie, maar dit help om die tendens van die data voor te stel.

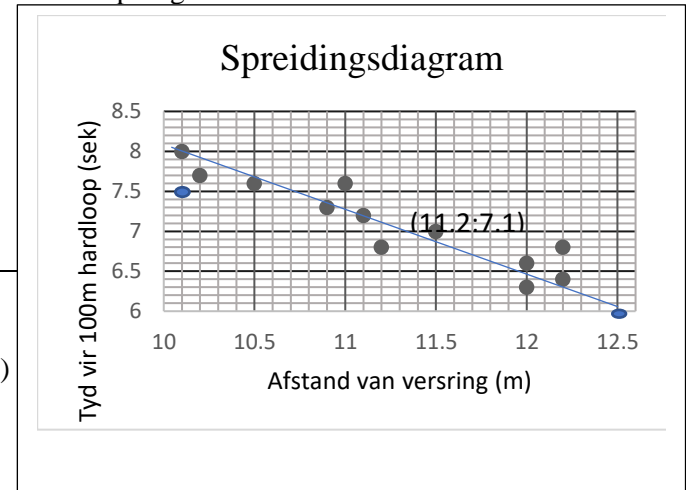
Hoe om die lyn van beste passing te skets:

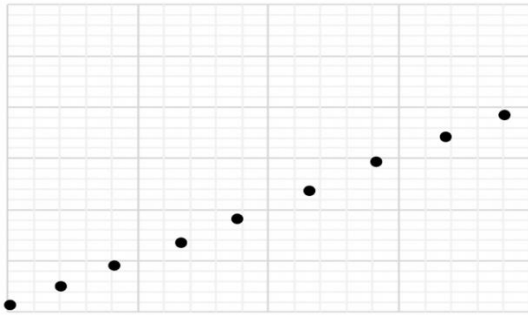
- Probeer om dieselfde hoeveelheid datapunte bo en onder die lyn te hê.

<p>Hoe om 'n regressielyn te skets: Plot die A waarde van die regressielyn. Bepaal die gemiddelde punte $(\bar{x}; \bar{y})$ en plot die gemiddelde punt. Skets 'n lyn vanaf punt A deur die gemiddelde punt. Hoe om 'n regressielyn te bepaal as die grafiek nie by die oorsprong (0; 0) begin nie Om 'n regressielyn te bepaal, vervang enige twee x-waardes wat tussen die maksimum en minimum x-waardes in die regressielyn se vergelyking. Dui die punte aan op die grafiek en verbind die punte.</p>	<p>Hoe om die gemiddelde punt te bepaal op 'n Casio fx-82ZA sakrekenaar :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Maak seker dat al jou data ingevul is in jou sakrekenaar. • Druk SHIFT, druk dan 1 • Druk die nommer langs "Var" • Druk die nommer langs \bar{x}, druk dan =: om die gemiddelde x te vind • Druk SHIFT, druk dan 1 • Druk die nommer langs "Var" Druk die nommer langs \bar{y}, druk dan =: om die gemiddelde y te vind 	<p>Uitskieters Dit is 'n waarde wat "verder" (hoër of laer) is as meeste van die ander data punte. Los die uitskieter uit as jy die lyn van beste passing skets of die regressielyn bereken. Die rede hiervoor is dat die uitskieter nie die tendens volg nie en sal die tendenslyne beïnvloed wat toekomstige voorspellings nie so akkuraat, as moontlik, sal maak nie.</p>																																										
<p>Voorbeeld 1: By 'n kliniek waar COVID 19 toetse gedoen word, was die onderstaande data vir 7 dae in Junie maand aan geteken</p> <table border="1" data-bbox="163 826 996 967"> <tr> <td>COVID 19 positief</td> <td>49</td> <td>65</td> <td>82</td> <td>60</td> <td>65</td> <td>94</td> <td>88</td> </tr> <tr> <td>Aantal toetse</td> <td>156</td> <td>176</td> <td>183</td> <td>153</td> <td>163</td> <td>192</td> <td>180</td> </tr> </table> <ol style="list-style-type: none"> 1. Skets 'n spredingsdiagram van die gegewe data. 2. Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. 3. Skets die kleinste kwadrate regressielyn. 4. Hoeveel toetse sal gedoen word om gemiddeld 100 COVID 19 uitslae per dag aan te teken. 		COVID 19 positief	49	65	82	60	65	94	88	Aantal toetse	156	176	183	153	163	192	180	<p>KAN JY? Die onderstaande table dui die tyd aan wat 12 atlete neem om 100m te hardloop en ook hulle beste afstand vir verspring.</p> <table border="1" data-bbox="1167 849 2063 1082"> <tr> <td>Tyd 100m hardloop (sek)</td> <td>10,1</td> <td>10,2</td> <td>10,5</td> <td>10,9</td> <td>11</td> <td>11,1</td> <td>11,2</td> <td>11,5</td> <td>12</td> <td>12</td> <td>12,2</td> <td>12,5</td> </tr> <tr> <td>Afstand van verspring (m)</td> <td>8</td> <td>7,7</td> <td>7,6</td> <td>7,3</td> <td>7,6</td> <td>7,2</td> <td>6,8</td> <td>7</td> <td>6,6</td> <td>6,3</td> <td>6,8</td> <td>6,4</td> </tr> </table>	Tyd 100m hardloop (sek)	10,1	10,2	10,5	10,9	11	11,1	11,2	11,5	12	12	12,2	12,5	Afstand van verspring (m)	8	7,7	7,6	7,3	7,6	7,2	6,8	7	6,6	6,3	6,8	6,4
COVID 19 positief	49	65	82	60	65	94	88																																					
Aantal toetse	156	176	183	153	163	192	180																																					
Tyd 100m hardloop (sek)	10,1	10,2	10,5	10,9	11	11,1	11,2	11,5	12	12	12,2	12,5																																
Afstand van verspring (m)	8	7,7	7,6	7,3	7,6	7,2	6,8	7	6,6	6,3	6,8	6,4																																

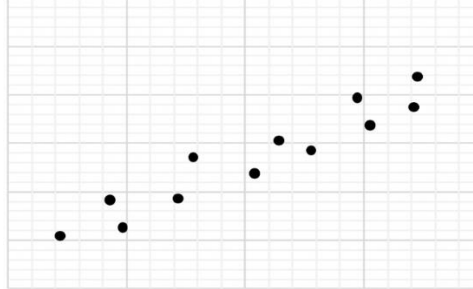


<p style="text-align: center;">Spreidingsdiagram</p>  <p style="text-align: center;">Aantal COVID 19 positiewe uitsettings</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. Skets 'n spreidingsdiagram van die gegewe data. 2. Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. 3. Skets die kleinste kwadrate regressielyn. 4. As 'n atleet 100m in 11.7 sekondes hardloop gebruik die formule om te voorspel die afstand van die sprong.
<ol style="list-style-type: none"> 2. $y = A + Bx$ $y = 113,47 + 0,81x$ 3. $y = 113,47 + 0,81(49) = 153,16 \quad \therefore (49; 153,16)$ $y = 113,47 + 0,81(94) = 189,61. \quad \therefore (94; 189,61)$ 4. $y = 113,47 + 0,81(100) \quad y \approx 195$ toetse 	<p style="text-align: center;">Antwoorde:</p> <ol style="list-style-type: none"> 2. $y = 14,34 - 0,64x$ 3. (10,1; 7,8) (12,5; 6,3) 4. $y = 6,852$
<p style="text-align: center;">Korrelasie</p> <p>Die korrelasiekoëffisiënt is 'n statistiese maatstaf van die sterkte van die verwantskap tussen twee veranderlikes. Korrelasiekoëffisiënt word aangedui met (r) en is tussen -1 en 1. Hoe nader die datapunte aan die regressielyn is, hoe sterker is die verhouding. Dit beteken hoe nader r aan 1 of -1 is. Hoe verder die datapunte van die regressielyn af is, hoe swakker is die verhouding, en hoe nader is r aan 0. As die gradiënt van die regressielyn positief is, dan het die data 'n positiewe korrelasie en as die gradiënt van die regressie lyn negatief is, dan het die data 'n negatiewe korrelasie. As die korrelasiekoëffisiënt groter is as 0,9 het die data 'n baie sterk positiewe korrelasie. As die korrelasiekoëffisiënt kleiner is as -0,9, sê ons dat daar 'n baie sterk negatiewe korrelasie is. Die sterkte van die assosiasie word bepaal deur die korrelasiekoëffisiënt (r).</p>	

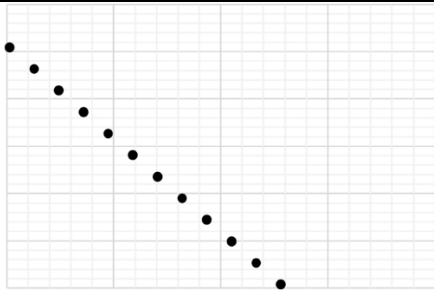




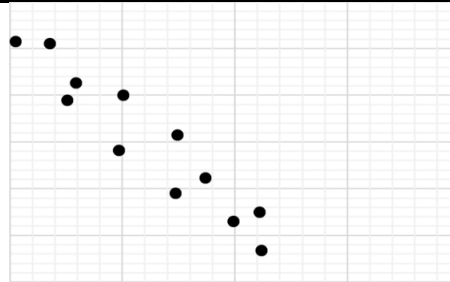
Perfekte positiewe lineêre verwantskap.



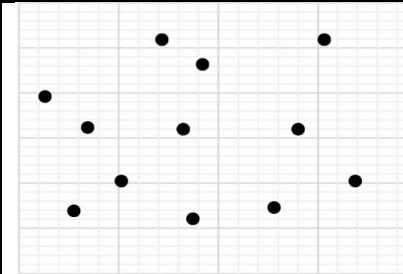
Baie Sterk positiewe lineêre verwantskap.



Perfekte negatiewe verwantskap.



Baie Sterk negatiewe verwantskap.



Geen verwantskap.

Voorbeeld 2:

Die data hieronder stel die proefeksamen punt en die ooreenkomstige finale eksamenpunt vir elf graad 12 leerders voor.

Proef punt	80	68	94	72	74	83	56	78	65	75	88
Finale punt	78	71	96	77	77	80	58	83	71	80	92

- Gebruik die gegewe tabel om die korrelasiekoëffisiënt r te vind en maak 'n gevolgtrekking oor die sterkte van die korrelasie/verwantskap van die twee veranderlikes.

Hoe om jou sakrekenaar te gebruik om die korrelasiekoëffisiënt te bepaal:

- Maak seker al jou data is korreëk ingevoer. Sien instruksies op b;adsy 2.
- Na al die data punte ingevul is druk AC
- Druk SHIFT , druk dan 1
- Druk die nommer langs “Reg”
- Druk die nommer langs r , dan druk =: om r te vind

Oplossing:

$r = -0,96 \therefore$ Daar is 'n sterk positiewe lineêre korrelasie/ verwantskap tussen die twee veranderlikes



KWADRATIESE ONGELYKHEDDE EN GELYKTYDIGE VERGELYKINGS

Voorbeeld 1: Los die volgende ongelykhede op.

$$\begin{aligned} 1. \quad x + 1 &< 3 \\ x &< 3 - 1 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x + 3 &\geq 1 \\ -\frac{3}{2}x &\geq -2 \\ -3x &\geq -4 \\ x &\leq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Onthou om die ongelykheids teken om te draai as jy met 'n negatiewe getal deel.

$$\begin{aligned} -4x - 2x &\geq 24 - 12 \\ -4(x - 3) &\geq 2(x - 12) \\ -4 + 12 &\geq 2x - 24 \\ -6x &\geq -36 \\ \therefore x &\leq 6 \end{aligned}$$

KAN JY? Los die volgende ongelykhede op.

1. $2x + 3 > 1$

2. $\frac{2x+4}{7} \geq \frac{3(x-3)}{3}$

3. $4(x - 3) \geq 2(x - 10)$

Antwoorde

1. $x > -1$

2. $x \leq 5$

3. $x \geq -4$

Kwadratiese Ongelykhede

'n Kwadratiese ongelykheid behels die bepaling van die waardes van x van 'n parabool wat onder of bo die x -as lê. In die 2de kwartaal (Funksies) sal jy geleer word om in detail 'n parabool te skets. Al wat ons nou benodig is 'n basiese begrip van hoe om die x -afsnitte van 'n parabool te bereken asook die vorm.

Voorbeeld 2 Los op vir x in die volgende ongelykheid

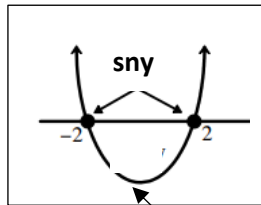
$$\begin{aligned} x^2 &\leq 4 \\ x^2 - 4 &\leq 0 && \text{Gebruik faktoriserings om die kritiese waardes te vind.} \\ (x + 2)(x - 2) &\leq 0 \\ \therefore -2 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Die grafiek van die parabool is positief omdat die koëfisient van x^2 positief is.

Die x -afnit word as volg bepaal:

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

$\therefore x = -2$ of $x = 2$ Skets die grafiek van die parabool (fokus op die x -afsnitte)



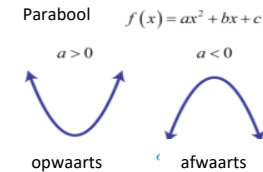
Die kritiese waardes is -2 en 2.

Bepaal nou die waardes van x waarvoor $x^2 - 4 \leq 0$

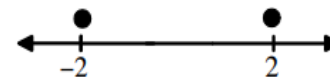
Dit is waar die grafiek die x -as **sny** en waar dit **onder** die x -as lê.

Die oplossing is duidelik tussen die twee x -afsnitte: $-2 \leq x \leq 2$

Onthou



Die kritiese waardes word ingesluit in die finale antwoord. Dit wil sê ons sal geslote sirkels gebruik om die ongelykheid voor te stel op 'n getalle lyn.





2. Los op vir x in die volgende ongelykheid

$$x^2 - 3x - 18 \leq 0$$

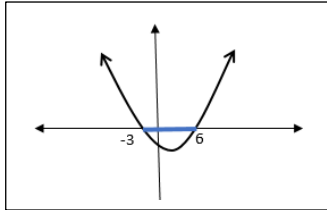
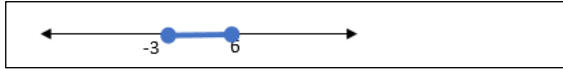
$$(x + 3)(x - 6) \leq 0$$

$$x + 3 \leq 0 \text{ of } x - 6 \leq 0$$

$$x \leq -3 \text{ of } x \leq 6$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 6$$

Ons kan die resultaat voorstel op 'n getallelyn.



3. Los op vir x in die volgende ongelykheid

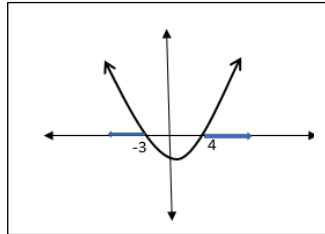
$$x^2 - x - 12 > 0$$

$$(x - 4)(x + 3) > 0$$

Kritieke waardes is 4 en -3

$$x < -3 \text{ of } x > 4$$

Onthou dat $(x - 4)(x + 3) > 0$



4. Los op vir x in die volgende ongelykheid $x - 2x^2 \geq 0$

$$-2x^2 + x \geq 0$$

Skryf in standaard vorm maak die koëfisient x^2

$$2x^2 - x \leq 0$$

positief, maal met -1 draai die teken om wanneer

$$x(2x - 1) \leq 0$$

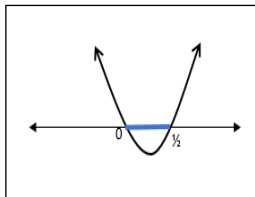
jy maal of deel met 'n negatiewe getal.

Die grafiek van die parabool $y = 2x^2 - x$ is konkaaf op.

Die x -afnit word as volg bepaal:

$$x(2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ of } x = \frac{1}{2} \text{ kritiese waardes.}$$



Bereken nou die waardes van x vir wat $x(2x - 1) \leq 0$

Dit is waar die grafiek die x -as sny en waar dit onder die x -as lê.

Die oplossing lê duidelik tussen die twee x -afnitte: $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$



Die ongelykheids teken sê vir ons of die antwoord onder (waar y negatief is) of bo (waar y positief is) die x -as lê.

Die volgende tabel sal jou geheue verfris van kennis wat benodig word om aan te gaan met gr 11 inhoud.

Ongelykheids teken	In woorde	Ingesluit/uitgesluit	Getallelyn
$>$	Groter as	Uitgesluit (oop)	
\geq	Groter of gelyk aan	Ingesluit (toe)	
$<$	Kleiner as	Uitgesluit (oop)	
\leq	Kleiner of gelyk aan	Ingesluit (toe)	

Ongelykheid	Interval notasie	Getallelyn
Inequality	Interval notation	
$x > 2$	$x \in (2; \infty)$	
$x \geq 2$	$x \in [2; \infty)$	
$2 \leq x \leq 6$	$x \in [2; 6]$	
$2 < x < 6$	$x \in (2; 6)$	
$2 \leq x < 6$	$x \in [2; 6)$	
$2 < x \leq 6$	$x \in (2; 6]$	

KAN JY? Los die volgende ongelykhede op.

1. $x^2 < 16$ 2. $x^2 + 5x - 6 \geq 0$ 3. $x^2 \leq 4x$ 4. $-x^2 + 3x + 4 \leq 0$

Antwoorde:

1. $-4 < x < 4$ 2. $x \leq -6$ of $x \geq 1$ 3. $0 \leq x \leq 4$ 4. $-1 \leq x \leq 4$



Gelyktydige vergelykings

In gr 10 het jy gelyktydige vergelykings opgelos om die sny punt te vind tussen twee reguitlyne. (een x – waarde en een y – waarde).

Kom ons kyk of jy onthou hoe om liniêre vergelykings gelyktydig op te los.

Voorbeeld 3

Los die volgende vergelykings gelyktydig op.

$$2y = 2x - 1 \text{ en } 2y + x - 2 = 0$$

$2y + x - 2 = 0$ **laat een van die veranderlikes die onderwerp wees van die vergelyking**

$$x = 2 - 2y$$

$2y = 2x - 1$ gebruik die inligting en stel dit in die tweede vergelyking in

$$2y = 2(2 - 2y) - 1$$

$2y = 4 - 4y - 1$ Jy behoort nou 'n vergelyking te hê met een veranderlike. Stel nou die vergelyking in die eerste vergelyking om die tweede vergelyking te vind

$$6y = 3$$

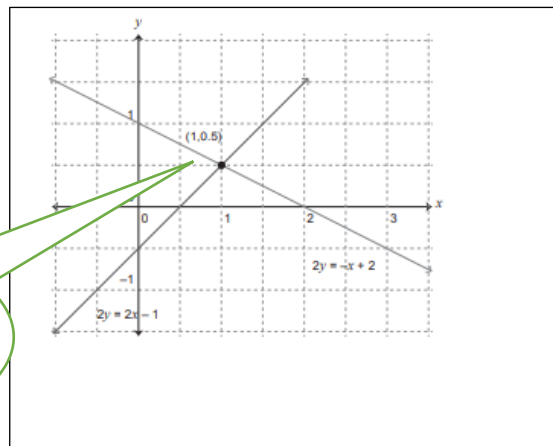
$$y = \frac{1}{2}$$

$$x = 2 - 2y$$

$$x = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 1$$

$$\therefore x = 1 \text{ en } y = \frac{1}{2} \quad \left(1; \frac{1}{2}\right)$$



Gelyktydige
vergeljking

Ons kan sny punte van ander pare grafieke/vergeljkinge (bv. 'n reguitlyn en 'n parabool, twee parabole of 'n hiperbool en 'n reguitlyn ens.) se sny punte bereken.

Onthou ons kan elke vergelyking voorstel as 'n grafiek. Indien ons beide grafieke op dieselfde assentelsel skets dan sal die sny punt van die twee grafieke die oplossing wees van die gelyktydige vergelyking.

Ons sal nou leer hoe om vergelykings gelyktydig op te los waar die een vergelyking 'n kwadratiese vergelyking is.

Wanneer vergelykings gelyktydig opgelos word kan ons:

Dit grafies oplos deur 'n akkurate skets te teken om die sny punt te vind.

Dit algebraïes oplos.

In hierdie les gaan ons verduidelik hoe om gelyktydige vergelykings algebraïes op te los.

Voorbeeld 4

Los x en y gelyktydig op.

(Kwadratiese vergelyking) $y = x^2 - 1$ en $y - x = 5$ (liniêre vergelyking)

Oplossing

$y - x = 5$ maak y die onderwerp van die vergelyking.

$$\therefore y = x + 5$$

Stel nou $x + 5$ in die kwadratiese vergelyking in en los x op

$$y = x^2 - 1$$

$$\therefore x + 5 = x^2 - 1$$

$$\therefore 0 = x^2 - x - 6$$

$$\therefore 0 = (x - 3)(x + 2)$$

$$\therefore x = 3 \text{ of } x = -2$$

Die ooreenstemmende waardes y kan bepaal word deur die waardes van x in die liniêre vergelyking van $y = x + 5$ te vervang.

$$\text{Vir } x = 3$$

$$y = 3 + 5$$

$$y = 8$$

$$\text{Vir } x = -2$$

$$y = -2 + 5 = 3$$

$$y = 3$$

Die oplossing kan ook in die volgende vorm geskryf word $(3; 8)$ en $(-2; 3)$



Los x en y gelyktydig op.

$$3x - y + 2 = 0 \text{ en } y = -x^2 + 2x + 8$$

$$3x + 2 = y$$

$$3x + 2 = -x^2 + 2x + 8$$

$$0 = -x^2 - x + 6$$

$$0 = (x + 3)(x - 2)$$

$$x = -3 \text{ of } x = 2$$

$$y = 3(-3) + 2$$

$$y = 3(2) + 2$$

$$y = -7$$

$$y = 8$$

KAN JY?

Los x en y vir die volgende vergelykings

1. $y = x^2 - 2$ en $y - 2x = 1$

2. $y = 3x + 7$ en $y = 2x^2 + 8$

3. $x - 3y = 1$ en $x^2 + xy + 9y^2 = 17$

Bereken die snypunte van die volgende grafieke :

4. $y = 2x$ en $y = 3x^2 - 1$

Antwoorde

1. $x = 3$ of -1 en $y = 7$ en -1 of $(3; 7)(-1; -1)$

2. $x = \frac{1}{2}$ of 1 en $y = \frac{17}{2}$ en 10 of $(\frac{1}{2}; \frac{17}{2})(1; 10)$

3. $(-3; -\frac{4}{3})$ of $(4; 1)$ 4. $(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$ of $(1; 2)$

Voorbeeld 5

Bepaal algebraïes die snypunte van die onderstaande grafieke.

$$x^2 - 2x - 3 \text{ en } y - x + 3 = 0$$

Oplossing

$$y = x^2 - 2x - 3 \text{ (Vergelyking 1)}$$

$$y - x + 3 = 0 \text{ (Vergelyking 2)}$$

$$y = x - 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = x - 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ en } x = 3$$

(Vervang vir x in vergelyking 2)

$$y = x - 3$$

$$y = 0 - 3 \text{ of } y = 3 - 3$$

$$\therefore y = -3 \text{ of } y = 0$$

Snypunte

$(0, -3)$ and $(3; 0)$

Nota: Wanneer ons twee vergelykings gelyktydig oplos, soek ons na die geordende paar wat aan beide vergelykings sal voldoen.

Konsolidasie

- Jy behoort nou 'n kwadratiese ongelykheid met een veranderlike op te los en grafies voor te stel.
- Jy behoort ook te weet hoe om vergelykings met twee veranderlikes een liniêr en die ander een kwadratiese algebraïes op te los.



RYE EN REEKSE

'n **Rekenkundige Ry** is 'n ry waar die **konstante verskil tussen opeenvolgende terme dieselfde** is.

In die ry: **5; 9; 13; 17; 21; ...**

$$a = \text{die eeste term} = T_1$$

$$d = \text{konstante verskil}$$

$$d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2$$

$$n = \text{aantal terme}$$

Let op dat $a = 5$ en $d = 4$

$$T_1 = 5 = a$$

$$T_2 = 9 = 5 + 4 = a + d$$

$$T_3 = 13 = 5 + 2(4) = a + 2d$$

$$T_4 = 17 = 5 + 3(4) = a + 3d$$

$$T_n = 5 + (n - 1)(4) = a + (n - 1)d$$

Die Algemene Term T_n

Word gegee deur

$$T_n = a + (n - 1)d$$

Voorbeeld 1:

Gegee die ry : 2; 5; 8; ...

a) Bepaal die algemene term van die ry.

b) Gebruik die algemene term en bepaal die 40^{ste} term.

c) Watter term in die ry sal gelyk wees aan 2012.

Oplossing: **konstante verskil: $d = T_2 - T_1 = 5 - 2 = 3$**

$$a = T_1 = 2$$

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n - 1)d \\ &= 2 + (n - 1)3 \\ &= 2 + 3n - 3 \\ &= 3n - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore T_n = 3n - 1$$

$$T_n = 3n - 1$$

$$\therefore T_{40} = 3(40) - 1$$

$$T_{40} = 119$$

Posisie van die term is 40. Daarom is, $n = 40$

$$T_n = 2012$$

$$\therefore T_n = 3n - 1 = 2012$$

$$3n = 2012 + 1$$

$$3n = 2013$$

$$n = 671$$

Waarde van een van die terms is 2012. Daarom is T_n , 2012, want ons weet nie, die posisie van 2012 nie

\therefore 671^{ste} term van die patroon is gelyk aan 2012

<p><u>Voorbeeld 2:</u></p> <p>Bepaal die aantal terme in die rekenkundige ry -2; -6; -10; ... ; -150</p>	<p><u>Oplossing:</u></p> $d = -6 - (-2) = -4$ $T_n = a + (n - 1)d$ $T_n = -2 + (n - 1)(-4)$ $T_n = -4n + 2$ $T_n = -4n + 2 = -150$ $\therefore -4n = -152$ $\therefore n = 38$ <p>Daar is 38 terme</p>	<p><u>Voorbeeld 3:</u></p> <p>Bepaal die eerste drie terme van die rekenkundige ry met die konstante verskil van 10 en die vierde term van 39.</p>	<p><u>Oplossing:</u></p> <p>konstante verskil: $d = 10$</p> $T_4 = 39$ $T_n = a + (n - 1)d$ $T_4 = a + (4 - 1)d$ $39 = a + 3d$ $39 = a + 3(10)$ $9 = a$ <p>Dus is die ry 9; 19; 29</p>
<p><u>Voorbeeld 4:</u></p> <p>In die rekenkundige ry is die 2^{de} term gelyk aan 9 en die 5^{de} term is gelyk aan 21. Bereken</p> <p>a) Die eertse drie terme van die ry.</p> <p>b) Die 60^{ste} term</p>	<p><u>Oplossing:</u></p> $T_2 = a + d = 9 \quad (1) \text{ 2de term}$ $T_5 = a + 4d = 21 \quad (2) \text{ 5de term}$ $3d = 12 \quad (2) - (1)$ $d = 4$ $\therefore T_2 = a + d = 9$ $a + 4 = 9$ $a = 5$ <p>Die eerste drie terme is 5; 9; 13;</p> $T_{60} = a + 59d = 5 + 59(4) = 241$ <p>Dus is die 60^{ste} term 241.</p>	<p><u>Voorbeeld 5:</u></p> <p>$2p - 3$; $3p - 1$; $5p - 2$ die eerste drie terme van die rekenkundige ry.</p> <p>a) Bepaal die waarde van p.</p> <p>b) Die eertse drie terme van die ry.</p> <p>c) Bepaal die term wat gelyk is aan 2013</p>	<p><u>Oplossing:</u></p> $d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2$ $(3p - 1) - (2p - 3) = (5p - 2) - (3p - 1)$ $3p - 1 - 2p + 3 = 5p - 2 - 3p + 1$ $p + 2 = 2p - 1$ $p = 3$ <p>b) Vervang $p = 3$ in die ry en die eerste drie term is 3; 8; 13</p> <p>c) $T_n = a + (n - 1)d = 2013$</p> $3 + (n - 1)(5) = 2013$ $3 + 5n - 5 = 2013$ $5n = 2015$ $n = 403$
<p>KAN JY?</p>	<p>1) Gegee die volgende ry: 3; 8; 13; 18; ... Bereken:</p> <p>a) Die algemene term</p> <p>b) Die 20^{ste} term</p> <p>c) Watter term van die ry is gelyk aan 223</p> <p>2) In 'n rekenkundige ry is $T_3 = -2$ en $T_8 = 23$. Bepaal die eerste term en die konstante verskil.</p> <p>3) Bepaal die aantal terme in die rekenkundige ry -5; -11; -17; ... ; -491</p> <p>4) Die eerste drie terme van 'n rekenkundige ry is $x - 8$; x; $2x - 5$. Bepaal</p> <p>a) die waarde van x.</p> <p>b) Die algemene term.</p> <p>c) Die waarde van die 115^{ste} term.</p>	<p>Antwoorde:</p> <p>1) a) $T_n = 5n - 2$ b) 98 c) $n = 45$</p> <p>2) $d = 5$ $a = -12$</p> <p>3) 82</p> <p>4) a) 13 b) $T_n = 8n - 3$ c) 917</p>	

REEKS: 'n Reeks word gevorm wanneer die **terme van 'n ry opgetel word.**

2; 5; 8; 11; 14;

Rekenkundige Ry

2 + 5 + 8 + 11 + 14

Rekenkundige Reeks

Die **Som van 'n ry** word voorgestel as S_n of die Griekse simbool Σ

Dus word die **som van die eerste n terme van 'n rekenkundige ry** gegee deur die formule:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \quad \text{or} \quad \frac{n}{2}[a + l]; \text{ waar } l, \text{ die laaste term is.}$$

$$S_n = S_{n-1} + T_n$$

Voorbeeld 6:

Beskou die rekenkundige ry $(-1) + \left(\frac{-3}{2}\right) + (-2) + \dots + (-16)$.

a) Bepaal die aantal terme in die ry.

Oplossing:

$$T_n = a + (n - 1)d$$

$$T_n = -1 + (n - 1)\left(\frac{-1}{2}\right) = -16$$

$$\therefore -1 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} = -16$$

$$\therefore -\frac{1}{2}n = -16 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore n = 31$$

b) Bereken die som van die ry.

Oplossing:

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$$\therefore S_{31} = \frac{31}{2}[-1 + (-16)]$$

$$\therefore S_{31} = -\frac{527}{2}$$

Voorbeeld 7:

Die som van hoeveel terme in die ry $1 + 4 + 7 + \dots$ is gelyk aan **145**.

Oplossing:

$a = 1$; $d = 3$; $n = ?$; $S_n = 145$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$145 = \frac{n}{2}[2(1) + (n - 1)3]$$

$$290 = n(2 + 3n - 3)$$

$$290 = n(3n - 1)$$

$$0 = 3n^2 - n - 290$$

$$0 = (3n + 29)(n - 10)$$

$$n = -\frac{29}{3} \quad \text{of} \quad n = 10$$

$$\therefore n = 10; n \in N$$

Voorbeeld 8:

Beskou die rekenkundige ry $-4 - 1 + 2 + \dots$

Bereken die kleinste waarde van n waarvoor $S_n > 300$

Oplossing:

$a = -4$; $d = 3$; $n = ?$; laat $S_n = 300$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = 300$$

$$\frac{n}{2}[2(-4) + (n - 1)3] = 300$$

$$\therefore n[3n - 11] = 600$$

$$\therefore 3n^2 - 11n - 600 = 0$$

$$\therefore n = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(3)(-600)}}{2(3)}$$

$$\therefore n = 16,09 \quad \text{of} \quad n = -12,43$$

\therefore Die kleinste moontlike waarde van n is 17.

SIGMA NOTASIE: Die Griekse letter Σ **Sigma** beteken die som van.

It word gebruik om die som van 'n stel opeenvolgende terme van 'n ry/reeks aan te dui. In hierdie notasie moet ons die posisie van die eerste en laaste term van die reeks aandui wat opgetel word.

n is die getal of posisie van die laaste term van die ry/reeks waarvan die som bepaal word. Kom ons verwys daarna as **laaste / boonste**

$$\sum_{k=1}^n T_k = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = S_n$$

Dit word gelees as, "die sigma of som van T_k , van $k = 1$ tot $k = n$.

Dit beteken, neem die som van die terme van 'n ry/reeks vanaf die eerste term tot die n 'th term van die ry/reeks.

Of dit beteken, die som van die eerste n terme van die ry/reeks.

$$\sum_{k=m}^n T_k$$

Algemene term van die ry/reeks in terme van k

n , die aantal terme wat bygevoeg word:

$$n = \text{boonste} - \text{onderste waarde} + 1$$

m is die nommer van die posisie van die eerste term van die ry/reeks waarvan die som bepaal word. Kom ons verwys daarna as eerste/**onderste waarde**

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d] = \sum_{k=1}^n [a + (k - 1)d]$$

Voorbeeld 9: Bepaal die waarde van:

$$\sum_{n=1}^5 (3n + 2)$$

Oplossing:

Metode 1

$$S_n = \sum_{n=1}^5 (3n + 2)$$

$$S_5 = (3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + (3 \cdot 4 + 2) + (3 \cdot 5 + 2)$$

$$= 5 + 8 + 11 + 14 + 17$$

$$S_5 = 55$$

Voorbeeld 10: Bepaal die waarde van:

$$\sum_{k=4}^7 2k$$

Oplossing:

Metode 1

$$\sum_{k=4}^7 2k$$

$$S_4 = 2(4) + 2(5) + 2(6) + 2(7)$$

$$= 8 + 10 + 12 + 14$$

$$S_4 = 44$$

Metode 2:

$$\sum_{n=1}^5 (3n + 2)$$

$$(3 \cdot 1 + 2) + (3 \cdot 2 + 2) + (3 \cdot 3 + 2) + \dots$$

$$= 5 + 8 + 11 + \dots$$

Vervang, n met 1, 2 & 3
Dit is om die eerste drie terme te bepaal.

$$8 - 5 = 3 \text{ and } 11 - 8 = 3$$

\therefore is dit 'n Rekenkundige reeks.

$$\therefore S_5 = \frac{5}{2} [2a + 4d]$$

$$\therefore S_5 = \frac{5}{2} [2(5) + 4(3)]$$

$$\therefore S_5 = 55$$

Aantal terme is 5
Of
 $n = \text{Boonste-} \text{onderste} + 1 =$
 $(5 - 1 + 1) = 5$

Metode 2:

$$\sum_{k=4}^7 2k$$

$$2(4) + 2(5) + 2(6) + \dots$$

$$= 8 + 10 + 12 + \dots$$

Vervang, n met 1, 2 & 3
Dit is om die eerste drie terme te bepaal.

$$10 - 8 = 2 \text{ en } 12 - 10 = 2$$

\therefore is dit 'n Rekenkundige

$$\therefore S_4 = \frac{4}{2} [2a + 3d]$$

$$\therefore S_4 = 2[2(8) + 3(2)]$$

$$\therefore S_4 = 44$$

Aantal terme is:
 $\text{Boonste-} \text{onderste} + 1$
 $= (7 - 4 + 1) = 4$

Let op die twee metodes hierbo. As die som van 'n stel terme van 'n ry / reeks vir baie terme bepaal word, sê byvoorbeeld dit is vir 'n honderd terme, dan is dit meer sinvol om die tweede metode te gebruik. Jy sal dan die som van die honderd terme kan bepaal sonder om elk van die honderd terme te bereken en dan op te tel.

Voorbeeld 11: Skryf die volgende reeks in sigma-notasie: $5 + 8 + 11 + 14 + 17$

Oplossing:

- 1) Bereken eers die algemene term vir die reeks waar $a = 5$ and $d = 3$.

$$\text{Vandaar } T_n = a + (n - 1)d$$

$$T_n = 5 + (n - 1)3$$

$$T_n = 5 + 3n - 3$$

$$T_n = 3n + 2$$

- 2) Skryf die formule nou in sigma-notasie

$$\sum_{n=\dots}^{\dots} (3n + 2)$$

Onderste waarde is die eerste term wat gelyk is aan 5:

$$3n + 2 = 5$$

$$3n = 3$$

$$n = 1$$

$$n = 5$$

boonstewaarde is die laaste term wat gelyk is aan 17:

$$3n + 2 = 17$$

$$3n = 15$$

- 3)

$$\sum_{n=1}^5 (3n + 2)$$

ANALITIESE MEETKUNDE 'TOOLKIT'

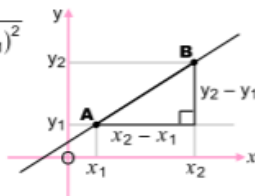
FORMULES

Beskou twee punte $A(x_1; y_1)$ en $B(x_2; y_2)$:

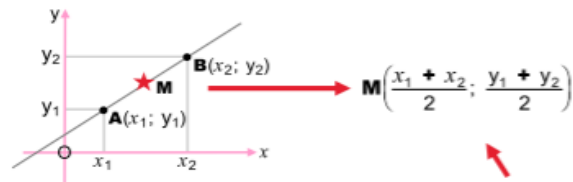
AFSTAND

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$... Stelling van Pythagoras

$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

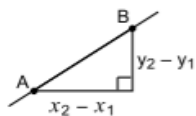


MIDDELPUNT



Die koördinate van die middelpunt, M , is die **gemiddeldes** van die koördinate van die eindpunte, A en B .

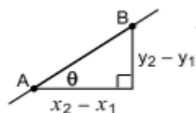
GRADIËNT



$m = \frac{\text{verandering in } y}{\text{verandering in } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

... die **gradiënt** van die lyn

Net so:

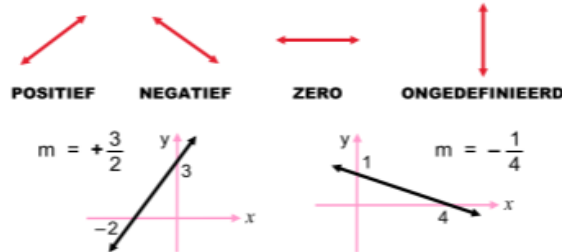


$\tan \theta = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggende}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

... waar θ die **inklinasiehoek** van die lyn is

Die Gradiënt van 'n lyn

Waardes

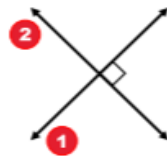


Ewewydige lyne

Ewewydige lyne het **gelyke** gradiënte.



Loodlyne



As die gradiënt van lyn **1** $\frac{2}{3}$ is, dan sal die gradiënt van lyn **2** $-\frac{3}{2}$ wees.

Let wel: $m_1 \times m_2 = \left(+\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1$

d.w.s. Die **produk** van die gradiënte van \perp lyne is -1 .

Kollineêre punte



Drie punte A, B & C is kollineêr as die gradiënte van **AB** & **AC** gelyk is. (Let wel: Punt **A** is gemeen.)

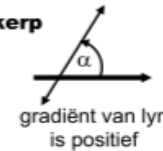
$m_{AB} = m_{AC} \iff A, B \& C$ is kollineêr

Die Inklinasie van 'n lyn

Hoek α en β hieronder is **inklinasiehoek**e.

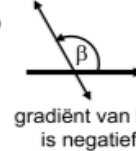
Die inklinasie van 'n lyn is die **hoek** wat die lyn met die positiewe rigting van die x -as maak.

α skerp



gradiënt van lyn is positief

β stomp



gradiënt van lyn is negatief

Gradiënt, $m = \tan \alpha$ of $\tan \beta$ waar α en β die **inklinasie** \angle^e is.

Grafieke in die algemeen

3 Basiese feite



1 : As-afsnitte

Elke punt op die **y-as** het $x = 0$.
Elke punt op die **x-as** het $y = 0$.

2 : Die vergelyking

Die **vergelyking** van 'n grafiek is waar vir **alle** punte op die grafiek.

\therefore Die **vergelyking** van die **y-as** is $x = 0$;
& die **vergelyking** van die **x-as** is $y = 0$.

3 : Tipes grafieke

Verskillende **tipes/patrone** word deur verskillende vergelykings aangedui.

bv. $y = mx + c$ dui 'n reguitlyn aan
 $x^2 + y^2 = r^2$ dui 'n sirkel aan



Belangrike Feite

FEIT 1: Punte op Grafieke

As 'n punt op 'n grafiek lê, is die vergelyking waar vir sy koördinate, d.w.s. die koördinate van die punt bevredig die vergelyking ... so, stel in!
en, omgekeerd,

As 'n punt (d.w.s. sy koördinate) die vergelyking van 'n grafiek bevredig (d.w.s. 'dit waar maak'), dan lê dit op die grafiek.

FEIT 2: Snypunt(e)

Die koördinate van die snypunt(e) van twee grafieke 'voldoen aan die voorwaardes' van albei grafieke, d.w.s. hulle bevredig albei vergelykings gelyktydig. Hulle word verkry:

- 'algebraïes' deur die 2 vergelykings op te los, of
- 'grafies' deur van die grafiek af te lees.

HIERDIE 2 FEITE IS DEURSLAGGEWEND!

REGUITLYNGRAFIEKE & hul vergelykings

Standaardvorme

Standaardvorme van die vergelyking van 'n reguitlyn:

▪ $y = mx + c$:

waar m = die gradiënt & c = die y-afsnit

Wanneer $m = 0$: $y = c$... 'n lyn || x -as

Wanneer $c = 0$: $y = mx$... 'n lyn deur die oorsprong

Net so: $x = k$... 'n lyn || y -as

▪ $y - y_1 = m(x - x_1)$:

waar m = die gradiënt & $(x_1; y_1)$ is 'n vaste punt.

Algemene vorm

Die **algemene vorm** van die vergelyking van 'n reguitlyn is $ax + by + c = 0$, bv. $2x + 3y + 6 = 0$

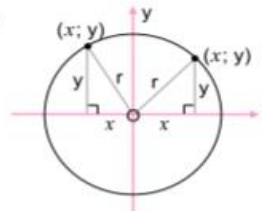
SIRKELS & hul vergelykings

Sirkels met die oorsprong as midpt.

Waar van enige punt $(x; y)$ op 'n sirkel met middelpunt $(0; 0)$ en radius r is dat:

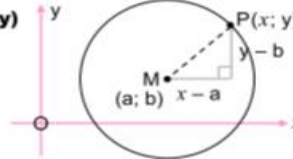
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Stelling van Pythag.!



Sirkels met enige gegewe midpt.

Waar van enige punt $(x; y)$ op 'n sirkel met middelpunt $(a; b)$ en radius r is dat:



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Afstandsformule! (Stelling van Pythag.)

Herlei van die vergelyking van 'n sirkel

Algemene vorm: $Ax^2 + Bx + Cy^2 + Dy + E = 0$

na **Standaardvorm:** $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

(deur voltooiing van vierkante)

bv. $x^2 - 6x + y^2 + 8y - 25 = 0$

$\therefore x^2 - 6x + y^2 + 8y = 25$

$\therefore x^2 - 6x + 3^2 + y^2 + 8y + 4^2 = 25 + 9 + 16$

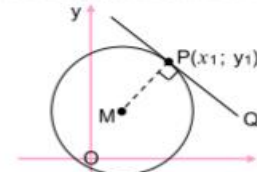
$\therefore (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 50$

Dit is die vergelyking van 'n sirkel met:

midpt. $(3; -4)$ & **radius**, $r = \sqrt{50}$ ($= 5\sqrt{2}$) eenhede

'n Raaklyn aan 'n sirkel ...

is loodreg op die radius van die sirkel by die raakpunt.



Om die vergelyking van 'n raaklyn te bepaal, gebruik 'm en 1 punt' in die reguitlynvergelting:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

bv. $m_{MP} = 2 \Rightarrow m_{PQ} = -\frac{1}{2}$

(\therefore radius $MP \perp$ raaklyn PQ)

Snypunt(e) van 'n Lyn en 'n Sirkel

'n Lyn en 'n sirkel óf

1 'sny' (twee keer!) [snylyn] (2 punte in gemeen)

of 2 'raak' (een keer!) [raaklyn] (1 punt in gemeen)

of 3 sny of raak glad nie (geen punte in gemeen nie)

As ons $y = mx + c$ in die vergelyking van die \odot instel,

sal daar óf: 1 2 oplossings

of 2 1 oplossing

of 3 geen oplossings

vir x wees nie, wat een van die bostaande scenario's tot gevolg sal hê.



LAASTE RAAD

Gebruik jou gesonde verstand & MAAK ALTYD 'N SKETS !!!

SAKREKENAARINSTRUKSIES



GEMIDDELDE & STANDAARDAFWYKING

Daar is 3 fases vir elke sakrekenaarprosedure:

STAP 1: hoe om daar te kom

STAP 2: hoe om die data in te tik

STAP 3: hoe om die gemiddelde en die standaardafwyking te bepaal (en, in die laaste kolom, A, B en r).



Ongegroepeerde Data

Casio

Jy sal sien:

- ♦ [MODE] [2 : STAT] [1 : 1 - VAR]

1	X	FREQ
...
2	...	automaties
...
3	...	as 1
...	...	ingetik
- ♦ Tik elke waarde, gevolg deur [=] na die laaste waarde in: [=] [AC] ← *
- ♦ Vir die **gemiddelde**: [SHIFT] [STAT] [4 : VAR] [2 : \bar{x}] [=] ←
- ♦ Vir die **S.A.:** [SHIFT] [STAT] [4 : VAR] [3 : σ_x] [=] ←

* → **Let wel vir Casio**

Dit is noodsaaklik om [AC] te druk wanneer al die data ingetik is.

As dit nie gedoen word nie, sal die gemiddelde en standaardafwyking as inskrywings in die datatabel, bygetel word. (Dit moet dan weer uitgewis word.)

Sharp

Jy sal sien:

- ♦ [MODE] [1 : STAT] - om in stats mode te kom ... dan [0 : SD]

Stat
0.
- ♦ Tik elke waarde in, gevolg deur [M+]
- ♦ Vir die **gemiddelde**: [RCL] [\bar{x}] ←
- ♦ Vir die **S.A.:** [RCL] [σ_x] ←



Gegroepeerde Data/Frekwensietabelle

Casio

Jy sal sien:

- ♦ [MODE] [2 : STAT] [1 : 1 - VAR] [SHIFT] [SETUP] Gaan af (gebruik pyltjie) [3 : STAT] [1 : ON]

1	X	FREQ
2
3
- ♦ Tik die middelpunt van elke interval in (of elke telling, indien verskaf) gevolg deur [=], dan ... Na die laaste waarde: [=] - en nie [AC] nie - dan ...
- ♦ Gebruik om na die bokant van die regterkolom te gaan.
- ♦ Tik die korrekte frekwensies in, elke keer gevolg deur [=]; na die laaste frekwensie: [=] [AC] ← *

- ♦ Vir die **gemiddelde**: [SHIFT] [STAT] [5 : VAR] [2 : \bar{x}] [=] ←
- ♦ Vir die **S.A.:** [SHIFT] [STAT] [5 : VAR] [3 : σ_n] [=] ←

Sharp

Jy sal sien:

- ♦ [MODE] [1 : STAT] - om in stats mode te kom ... dan [0 : SD]

Stat
0.
- ♦ Tik die middelpunt van elke interval in (of elke telling, indien verskaf) gevolg deur [STO]. Tik dan die frekwensie in, gevolg deur [M+]. (Tik al die data op dié manier in.)
- ♦ Vir die **gemiddelde**: [RCL] [\bar{x}] ←
- ♦ Vir die **S.A.:** [RCL] [σ_x] ←

REGRESSIE & KORRELASIE

Die Vergelyking van die Regressielyn

Casio

STAP 1:

Druk/Kies: **MODE**; **2** (STAT); **2** (A + Bx)

STAP 2:

Tik die **x-** en **y-waardes** in, elk gevolg deur [=].

Druk **AC**

STAP 3:

Druk **SHIFT** **STAT** (op '1'); **5** (Reg); dan:

Vir **A**, druk **1** [=] of Vir **B**, druk **2** [=]

Om **B** na **A** te bepaal, druk **AC** en doen dan die hele **STAP 3**.

Die Korrelasiekoëffisiënt

Casio

Net soos vir **A** en **B** in die regressiefunksie:

STAP 1:

Druk/Kies: **MODE**; **2** (STAT); **2** (A + Bx)

STAP 2:

Tik die **x-** en **y-waardes** in, elk gevolg deur [=].

Druk **AC**

STAP 3:

Druk **SHIFT** **STAT** (op '1'); **5** (Reg);

maar nou: Vir **r** druk **3** [=]

As jy eers **A** en **B** bepaal het, druk **AC** voor jy na die begin van **STAP 3** teruggaan.

Om alles te verwyder: Druk **SHIFT** **CLR** (op '9'); **1** [=] **AC**