

WISKUNDE GR12


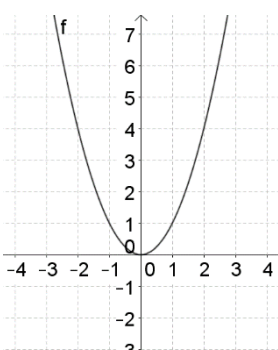
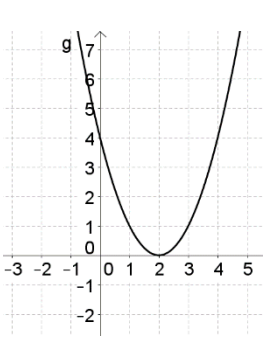
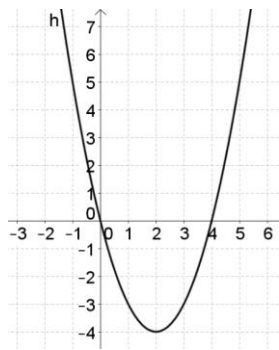

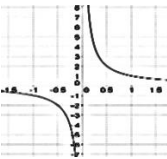
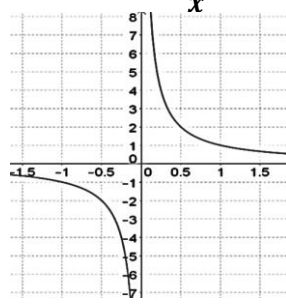
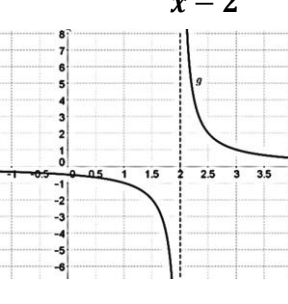
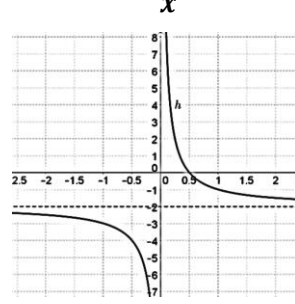
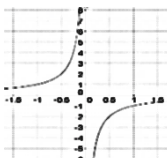
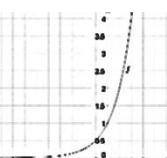
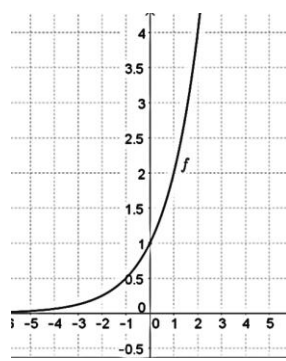
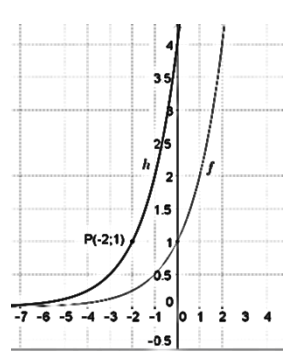
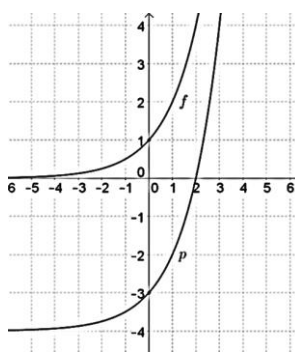
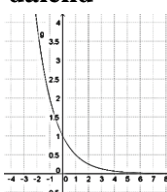
HERSIENINGSBOEKIE

2022 OORLEWINGS GIDS

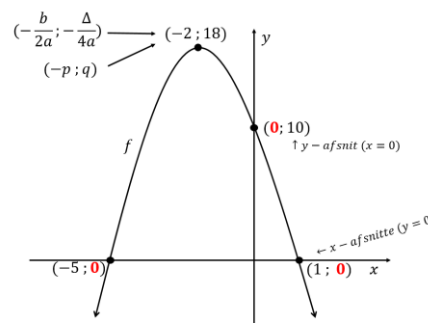
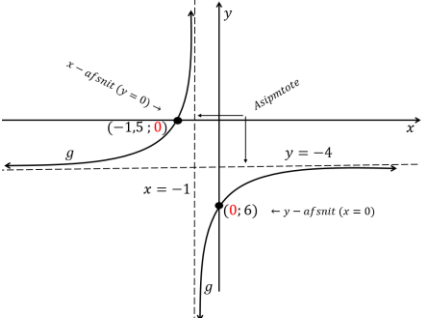
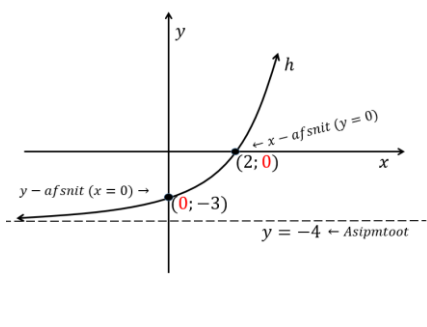
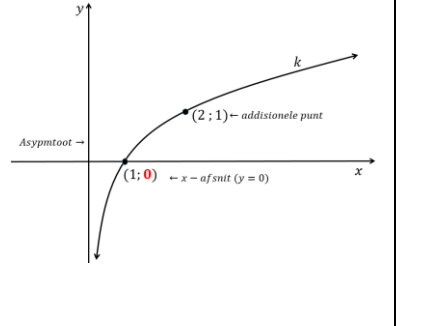
INHOUDSBLAD

	BLADSY
FUNKSIES	2 - 15
CALCULUS	16 – 19
FINANSIËLE WISKUNDE	20 - 23
TRIGONOMETRIE	24 - 31

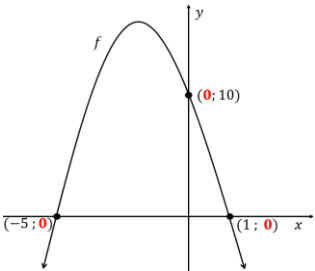
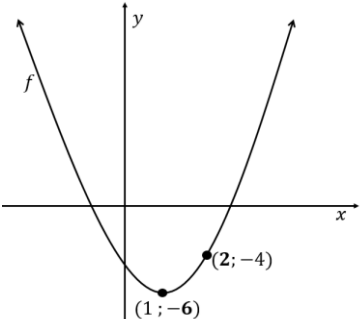
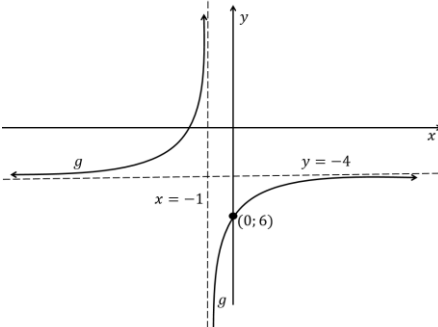
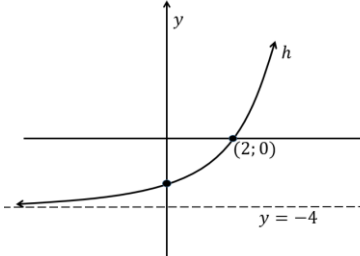
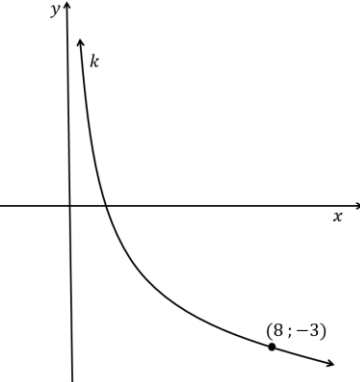
1. DIE MOEDERFUNKSIE EN DIE INVLOED VAN PARAMETERS

	Invloed van	Moederfunksie	Invloed van p en q	
<p>PARABOOL</p>	<p>$a > 0$</p> 	<p>$f(x) = x^2$</p> 	<p>$g(x) = (x - 2)^2$</p> 	<p>$h(x) = (x - 2)^2 - 4$</p> 
	<p>$a < 0$</p> 		<p>Skuif 2 eenhede regs ($p < 0$)</p>	<p>Skuif 4 eenhede af ($q < 0$)</p>
<p>HIPERBOOL</p>	<p>$a > 0$ 1^{ste} en 3^{de} kwadrant</p> 	<p>$f(x) = \frac{1}{x}$</p> 	<p>$g(x) = \frac{1}{x - 2}$</p> 	<p>$h(x) = \frac{1}{x} - 2$</p> 
	<p>$a < 0$ 2^{de} en 4^{de} kwadrant</p> 		<p>Skuif 2 eenhede regs ($p < 0$)</p>	<p>Skuif 2 eenhede af ($q < 0$)</p>
<p>EXPONENSIËLE GRAFIEK</p>	<p>$b > 1$ Stygend</p> 	<p>$f(x) = 2^x$</p> 	<p>$h(x) = 2^{x+2}$</p> 	<p>$p(x) = 2^x - 4$</p> 
	<p>$0 < b < 1$ dalend</p> 		<p>Skuif 2 eenhede links ($p > 0$)</p>	<p>Skuif 4 eenhede af ($q < 0$)</p>

2. SKETS VAN GRAFIEKE

	Parabool	Hiperbool	Eksponensiële grafiek	Logaritmiese grafiek
Standaard vorm	$y = ax^2 + bx + c$ $y = a(x + p)^2 + q$ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$y = \frac{a}{x + p} + q$	$y = a \cdot b^{x+p} + q$	$y = \log_a x$
Om die grafieke te skets, benodig jy: y -afsnit ($x = 0$) x -afsnit ($y = 0$)	Voorbeeld 1 Skets $f(x) = -2x^2 - 8x + 10$ OF $f(x) = -2(x + 2)^2 + 18$	Voorbeeld 2 Skets $g(x) = \frac{-2}{x+1} - 4$	Voorbeeld 3 Skets $h(x) = 2^x - 4$	Voorbeeld 4 Skets $k(x) = \log_2 x$
Draaipunt $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ OF $(-p; q)$				
Asimptoot(e) • $x = -p$ • $y = q$				
Definisie-versameling	$x \in R$	$x \in R ; x \neq -1$	$x \in R$	$x \in R ; x > 0$
Waardeversameling	$y \in R ; y \leq 18$	$y \in R ; y \neq -4$	$y \in R ; y > -4$	$y \in R$
Simmetrie-as	$x = -\frac{b}{2a}$ $x = -2$	$y = x + c$ Stel in $(-p; q) \rightarrow (-1; -4)$ $\therefore -4 = -1 + c$ $c = -3$ $y = x - 3$ OF $y = x - c$ Stel in $(-p; q) \rightarrow (-1; -4)$ $\therefore -4 = -(-1) + c$ $c = -5$ $y = -x - 5$		

3. OM DIE VERGELYKING VAN 'N GRAFIEK TE BEPAAL

Parabool	Hiperbool	Eksponensiële grafiek	Logaritmiese grafiek	
$y = ax^2 + bx + c$ $y = a(x + p)^2 + q$ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$y = \frac{a}{x + p} + q$	$y = a \cdot b^{x+p} + q$	$y = \log_a x$	
x –afsnitte gegee: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ Vir a : Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in.	Draaipunt gegee: $y = a(x + p)^2 + q$ Vir a : Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in.	Vir p en q: Begin deur die asimptote in die vergelyking te vervang. Vir a: Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in	Vir a: Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in	
 $y = a(x + 5)(x - 1)$ Stel in: (0; 10) $10 = a(0 + 5)(0 - 1)$ $10 = -5a$ $a = -2$ $y = -2(x + 5)(x - 1)$ $y = -2x^2 - 8x + 10$	 $y = a(x - 1)^2 - 6$ Stel in: (2; -4): $-4 = a(2 - 1)^2 - 6$ $2 = a(1)^2$ $a = 2$ $y = 2(x - 1)^2 - 6$ OF $y = 2x^2 - 4x - 4$	 $y = \frac{a}{x + 1} - 4$ Stel in: (0; -6) $-6 = \frac{a}{0 + 1} - 4$ $-2 = a$ $y = \frac{-2}{x + 1} - 4$	 $y = a^x - 4$ Stel in: (2; 0): $0 = a^2 - 4$ $a^2 = 4$ $a = 2$ $y = 2^x - 4$	 $y = \log_a x$ Stel in: (8; -3) $-3 = \log_a 8$ Skryf in eksponensiële vorm: $a^{-3} = 8$ $a = \frac{1}{2}$ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

4. TRANSFORMASIES

4.1 TRANSLASIE

- $p > 0$ horisontale skuif na **links**
- $p < 0$ horisontale skuif na **regs**
- $q > 0$ vertikale skuif **op**
- $q < 0$ vertikale skuif **af**

VOORBEELD: PARABOOL		Transleer 3 eenhede op.	Transleer 2 eenhede regs.
		Notasie: $f(x) + 3$	Notasie: $f(x - 2)$
	$f(x) = x^2$	$h(x) = x^2 + 3$	$g(x) = (x - 2)^2$

4.2 REFLEKSIE:

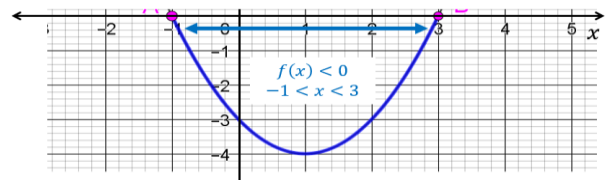
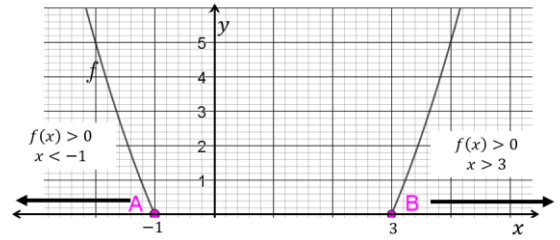
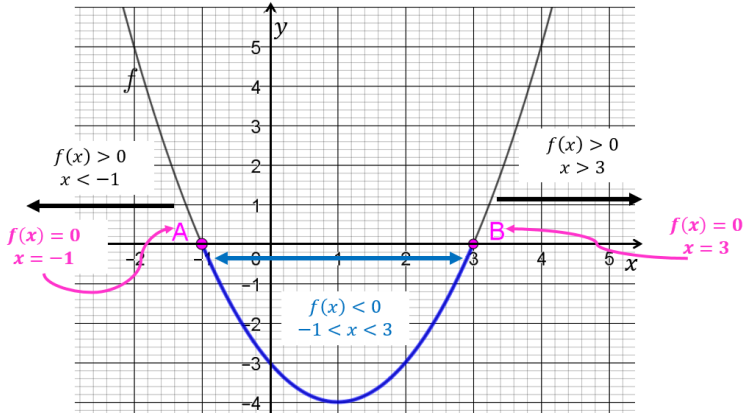
- REFLEKSIE in die $(x - as)$ OF in die lyn $y = 0$ Notasie: $f(x) \rightarrow -f(x)$
- REFLEKSIE in die $(y - as)$ OF in die lyn $x = 0$ Notasie: $f(x) \rightarrow f(-x)$
- REFLEKSIE in die lyn $y = x$ Notasie: $f(x) \rightarrow f^{-1}(x)$

VOORBEELD: PARABOOL	$h(x) = x^2 + 3$ $\rightarrow k(x) = -x^2 - 3$	$g(x) = (x - 2)^2$ $\rightarrow p(x) = (-x - 2)^2$	$f: y = x^2$ $f^{-1}: x = y^2$ $\therefore y = \pm\sqrt{x}$
EKSPONENSIELE FUNKSIE	$f(x) = 2^x + 3$ $\rightarrow -f(x) = -(2^x) - 3$	$f(x) = 2^x - 2$ $\rightarrow f(-x) = 2^{-x} - 2$	$f(x) = 2^x$ $\rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x$

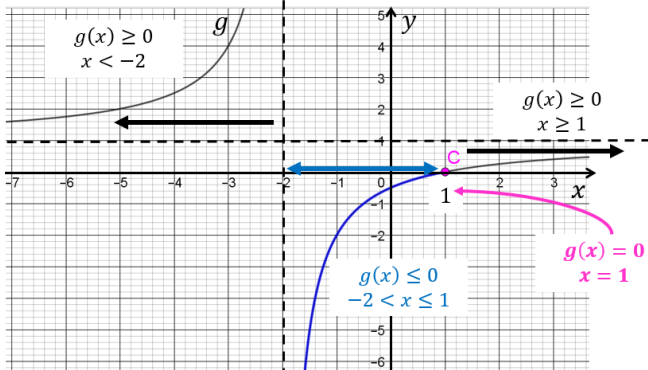
5. GRAFIEKE EN ONGELYKHEDE:

VOORBEELDE:

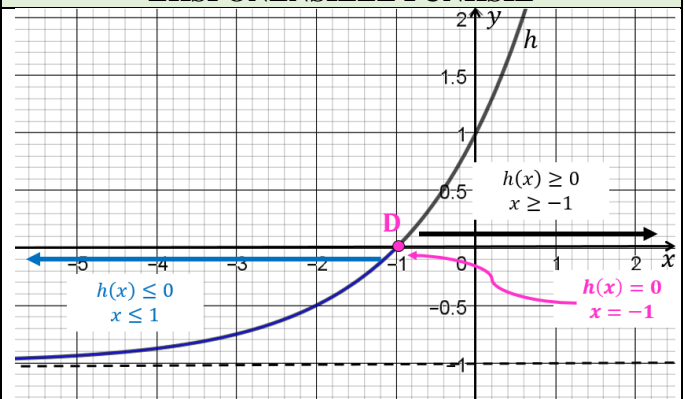
PARABOOL



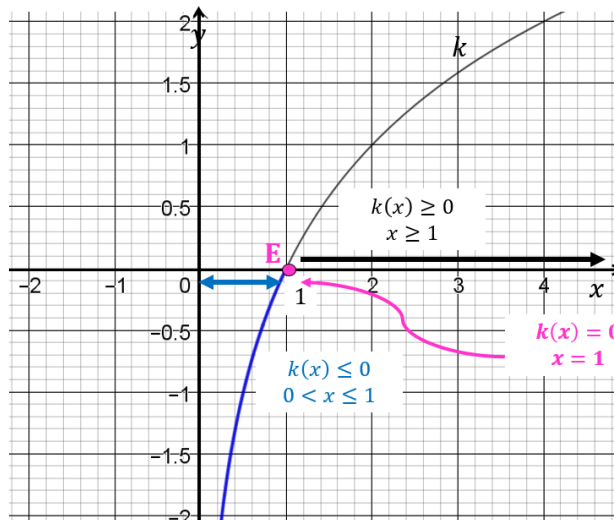
HIPERBOOL



EKSPONENSIELE FUNKSIE



LOGARITMIESE FUNKSIE



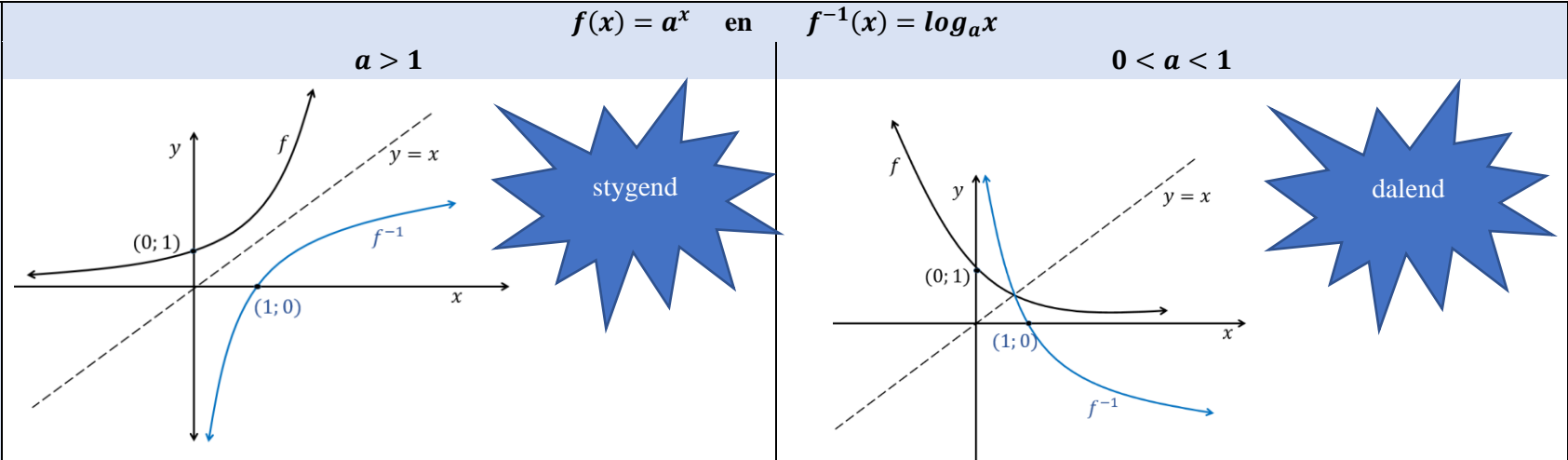
**6. LOGARITMIESE
FUNKSIE**

Die inverse van die eksponensiële funksie

$$f(x) = a^x$$

($a > 0$; $a \neq 1$) is die logaritmiëse funksie

$$f^{-1}(x) = \log_a x.$$



Nota:

- Die eksponensiële grafiek f is 'n **toenemende funksie** om die $y - as$ ($a > 1$)
- Die logaritmiëse grafiek f^{-1} is 'n **toenemende funksie** om die $x - as$ ($a > 1$)

Note:

- Die eksponensiële grafiek f is 'n **dalende funksie** om die $y - as$ ($0 < a < 1$)
- Die logaritmiëse grafiek f^{-1} is 'n **dalende funksie** om die $x - as$ ($0 < a < 1$)

Definisie (D) – en Waardeversameling (W):

f	$D: x \in R$	$W: y > 0$
f^{-1}	$W: y \in R$	$D: x > 0$

Inverse funksies:

Grafiek f^{-1} word verkry deur die grafiek f in die lyn $y = x$ te reflekteer. (die inverse van f)

- As $y = a^x$ dan word die inverse funksie gegee deur $x = a^y$ wat ook geskryf kan word as $y = \log_a x$
- As $y = \log_a x$ dan word die inverse funksie gegee deur $x = \log_a y$ wat ook geskryf kan word as $y = a^x$

Asimptote:

- Die eksponensiële grafiek f het 'n **asimptoot** $y = 0$ ($x - axis$)
- Die logaritmiëse grafiek f^{-1} het 'n **asimptoot** $x = 0$ ($y - axis$)

7. HERSIENINGSOEFENINGE

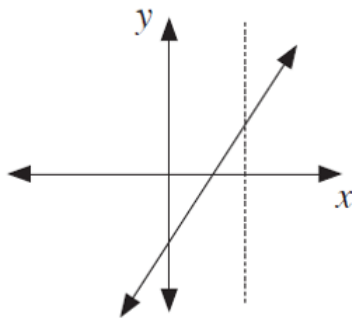
AFDELING A – Gr 12 FUNSIES EN INVERSESES (Roetine vrae)

- **Let daarop dat sommige van die vrae in hierdie afdeling geneem, is uit MIND THE GAP.**

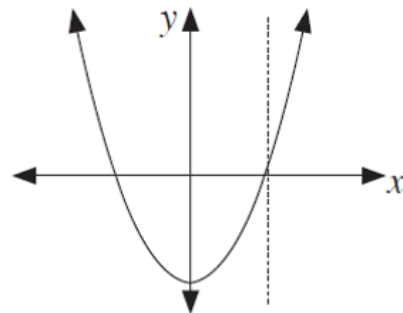
VRAAG 1

- 1.1
- 'n Funksie is 'n relasie tussen x en y , waar daar vir elke x –waarde slegs een y –waarde is.
 - Om te besluit of 'n grafiek 'n funksie voorstel of nie, kan ons gebruik maak van die vertikale lyn-toets.
- Sê of die volgende grafieke funksies is of nie.

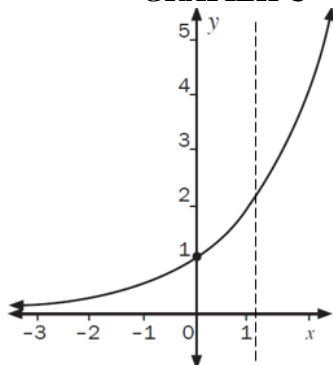
GRAFIEK A



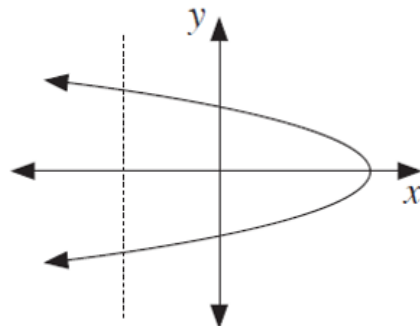
GRAFIEK B



GRAFIEK C



GRAFIEK D



- 1.2 Voltooi die volgende sinne:

- 'n Funksie moet langs die lyn _____ gereflekteer word om die inverse van die funksie te vorm.
- Die notasie vir die inverse van 'n funksie f word geskryf as _____



VRAAG 2

Gegee: $f(x) = 2x + 6$.

- 2.1 Bepaal $f^{-1}(x)$.
- 2.2 Skets die grafieke f, f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
Dui die afsnitte met die asse duidelik aan vir elk van die grafieke f en f^{-1} .
- 2.3 Bepaal the definisie- en waardeversameling van f en f^{-1}

VRAAG 3

- 3.1 Skets $f(x) = 2x^2$
Dui die afsnitte met die asse asook die koördinate van een ander punt op die grafiek van f duidelik aan.
- 3.2 Bepaal die inverse van $f(x)$.
- 3.3 Skets die grafieke f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
Dui die afsnitte met die asse asook die koördinate van een ander punt op die grafiek van f^{-1} . duidelik aan.
- 3.4 Bepaal die definisie- en waardeversameling van f en f^{-1} .

VRAAG 4

Gegee: $f(x) = -3x^2$

- 4.1 Bepaal die inverse van $f(x)$ in die vorm $y = \dots\dots\dots$
- 4.2 Bepaal die definisie- en waardeversameling van f en f^{-1} .

VRAAG 5

Gegee: $f(x) = 2^x$

- 5.1 Bepaal $f^{-1}(x)$ in die vorm $y = \dots\dots\dots$
- 5.2 Skets die grafieke f, f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
Dui die afsnitte met die asse asook die koördinate van een ander punt op die grafieke van f en f^{-1} duidelik aan.
- 5.3 Bepaal die definisie- en waardeversameling van f en f^{-1} .

AFDELING B– Gr 12 FUNSIES EN INVERSESE (Komplekse vrae)

- Let daarop dat die vrae in hierdie afdeling uit vorige vraestelle geneem is. (Die jaar waarin die vraag gevra is, word tussen hakies langs die vraag aangedui.)

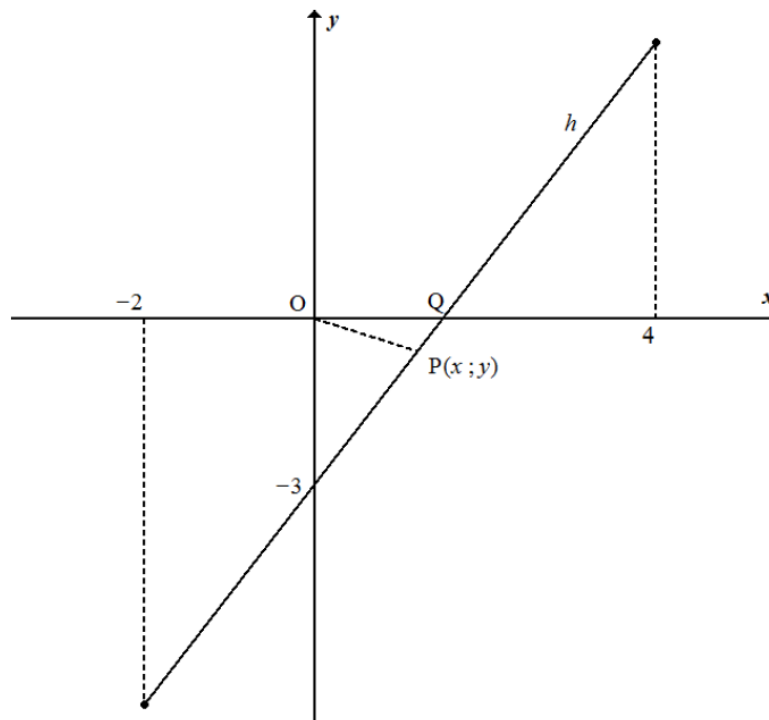
VRAAG 1 (Maart 2016 – VRAAG 6)

Gegee: $f(x) = \frac{1}{4}x^2, x \leq 0$

- 1.1 Bepaal die vergelyking f^{-1} in die vorm $f^{-1}(x) = \dots\dots\dots$
- 1.2 Skets die grafieke f en f^{-1} op dieselfde asstelsel. Dui duidelik die afsnitte met die asse aan, sowel as die koördinate van een ander punt op elk van die grafieke f en f^{-1} .
- 1.3 Is f^{-1} 'n funksie? Gee 'n rede vir jou antwoord.

VRAAG 2 (Nov 2015 – VRAAG 5)

Gegee: $h(x) = 2x - 3$ vir $-2 \leq x \leq 4$. Die x -afsnit van h is Q.



- 2.1 Bepaal die koördinate van Q.
- 2.2 Skryf die definisieversameling van h^{-1} neer.
- 2.3 Skets die grafiek h^{-1} , toon die y -afsnit en die koördinate van die eindpunte duidelik aan.
- 2.4 Vir watter waarde(s) van x is $h(x) = h^{-1}(x)$?

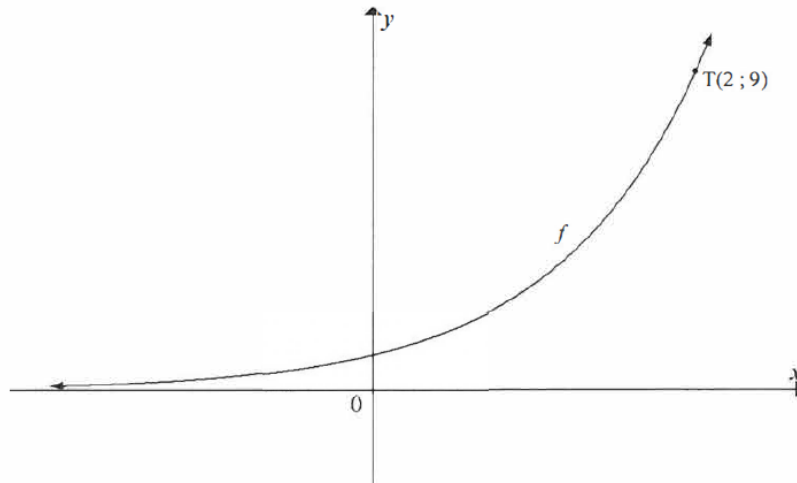
VRAAG 3 (DBE 2015 – VRAAG 5)

Gegee: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

- 3.1 Bepaal die waarde van $f(-2)$.
- 3.2 Skryf die vergelyking van $f^{-1}(x)$ neer in die vorm $y = \dots\dots\dots$
- 3.3 Andrew het geen idee hoe om die grafiek van f^{-1} te skets nie. Verduidelik vir Andrew hoe hy die grafiek van f kan gebruik om die grafiek van f^{-1} te skets.
- 3.4 Vervolgens, of andersins, skets die grafiek van f^{-1} . Dui ALLE afsnitte met die asse duidelik aan.
- 3.5 Skryf die definisieversameling van f^{-1} neer.
- 3.6 Vir watter waarde(s) van x is $f^{-1}(x) \geq -2$?
- 3.7 Gegee $q = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$
 - 3.7.1 Bepaal die waarde van q .
 - 3.7.2 Vervolgens, of andersins, bepaal die die koördinate van snypunt van f en f^{-1} .

VRAAG 4 (Maart 2015-VRAAG 5)

Die grafiek van $f(x) = a^x, a > 1$ word op die skets hieronder aangetoon. T (2 ; 9) lê op f .



- 4.1 Bereken die waarde van a .
- 4.2 Bepaal die vergelyking van $g(x)$ indien $g(x) = f(-x)$.
- 4.3 Bepaal die waarde(s) van x waarvoor $f^{-1}(x) \geq 2$.
- 4.4 Is die inverse van f 'n funksie? Verduidelik jou antwoord.

AFDELING C – GR 11 FUNKISIES (Vanaf vorige eksamen vraestelle)

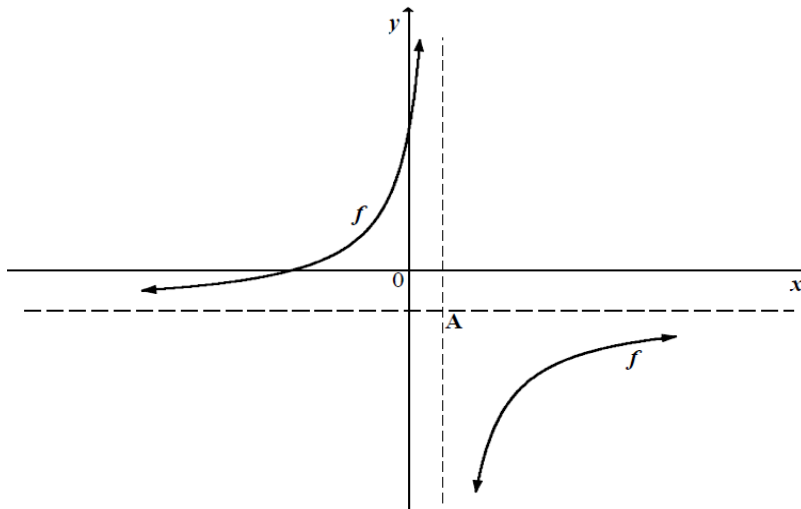
VRAAG 1 (GR11 DBE NOV 2017)

Gegee $f(x) = \frac{-3}{x+2} + 1$ en $g(x) = 2^{-x} - 4$

- 1.1 Bepaal $f(-3)$.
- 1.2 Bepaal x as $g(x) = 4$.
- 1.3 Skryf die asimptote van f neer.
- 1.4 Skryf die waardeversameling van g neer.
- 1.5 Bepaal die koördinate van die x -en y -afsnitte van f .
- 1.6 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van f met 'n negatiewe gradiënt. Los u antwoord in die vorm $y = mx + c$.
- 1.7 Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsel. Toon duidelik ALLE afsnitte met die asse en asimptote.

VRAAG 2 (GR11 DBE NOV 2015)

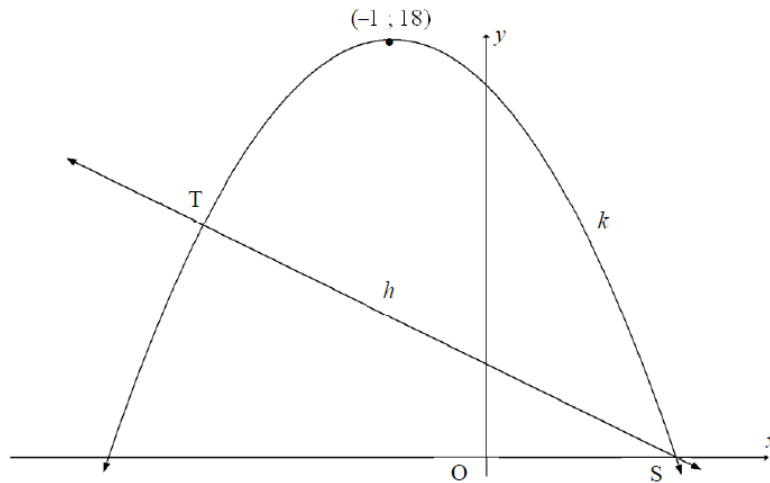
Die onderstaande skets stel die grafieke voor van $f(x) = \frac{-9}{x-1} - 2$
 A is die snypunt van die asimptote van f .



- 2.1 Skryf die koördinate van A neer.
- 2.2 Gee die definisieversameling van f .
- 2.3 Gee die vergelyking van die horisontale asimptoot vir $f(x) - 1$.
- 2.4 Bepaal die koördinate van die x - en y -afsnitte van f .
- 2.5 Skryf die vergelyking van die simmetrie-as van f neer wat 'n negatiewe gradiënt het.
- 2.6 Vir watter waardes van x is $f(x) \geq 0$?

VRAAG 3 (GR 12 DBE 2019 Vraag 5)

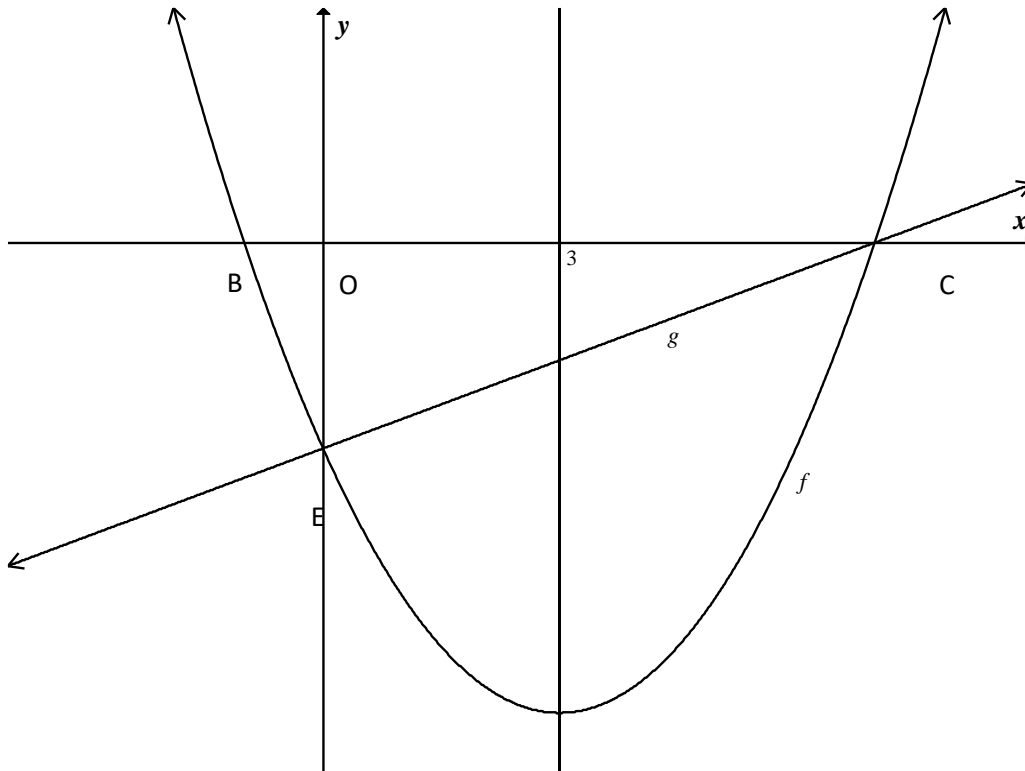
Die grafieke van $k(x) = ax^2 + bx + c$ en $h(x) = -2x + 4$ is hieronder geskets. Grafiek k het 'n draai punt by $(-1; 18)$. S is die x -afsnit van h en k . Grafieke h en k sny mekaar ook by T .



- 3.1 Bereken die koördinate van S .
- 3.2 Bepaal die vergelyking van k in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$
- 3.3 Indien $k(x) = -2x^2 - 4x + 16$, bepaal die koördinate van T .
- 3.4 Bepaal die waarde(s) van x waarvoor $k(x) < h(x)$
- 3.5 Daar word verder gegee dat k die grafiek van $g'(x)$ is.
 - (a) Vir watter waardes van x sal die grafiek van g konkaaf op wees?
 - (b) Skets die grafiek van g , en dui die x -waardes van die draaipunte en die buigpunt duidelik aan.
- 3.6 Bepaal die waardes van k sodat $f(x) = k$ gelyke wortels sal hê.
- 3.7 Bepaal die vergelyking h , as h die grafiek is nadat f TWEE eenhede na regs en EEN eenheid opwaarts geskuif het, in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

VRAAG 4 (NSC Maart 2011)

'n Parabool f sny die x -as by B en C en die y -as by E. Die simmetrie-as van die parabool het 'n vergelyking $x = 3$. Die vergelyking van die lyn deur E en C word gegee as $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$.

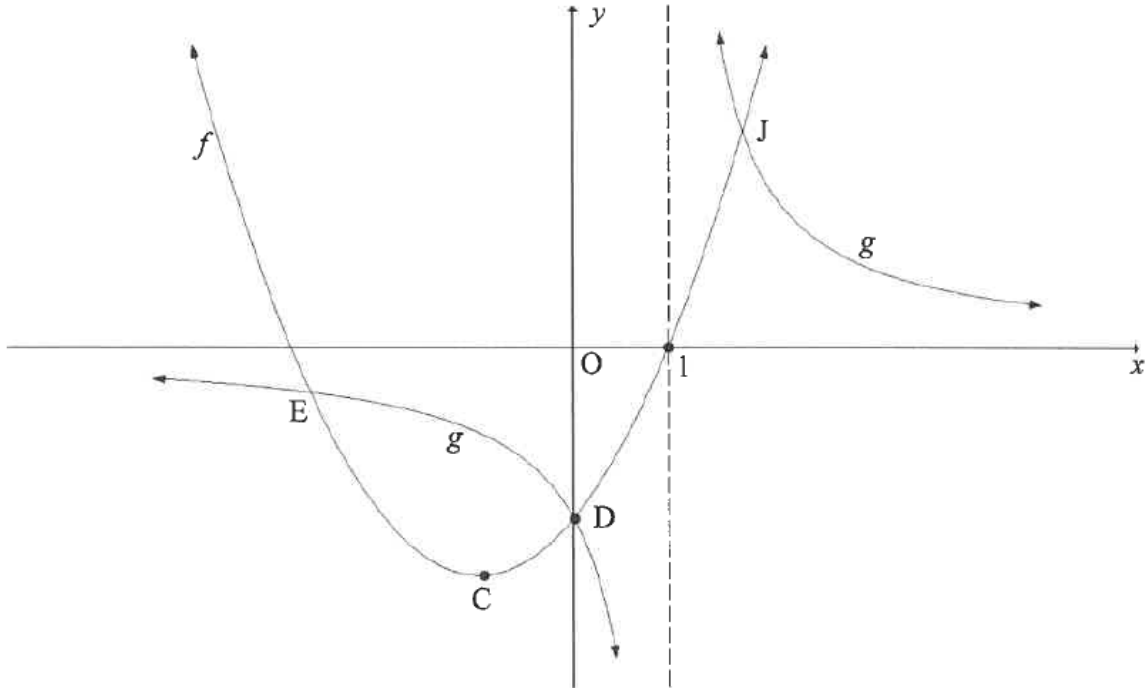


- 4.1 Toon aan dat die koördinate van C (7 ; 0) is.
- 4.2 Bereken die x – koördinaat van B.
- 4.3 Bepaal die vergelyking van f in die vorm $y = a(x - p)^2 + q$.
- 4.4 Bepaal die vergelyking van die grafiek van h , die refleksie van f in die x –as.
- 4.5 Gee die maksimum waarde van $t(x)$ as $t(x) = 1 - f(x)$.
- 4.6 Vir watter waarde(s) van x is $f(x) \geq 0$
- 4.7 Vir watter waarde(s) van x sal $f'(x) < 0$
- 4.8 Vir watter waarde(s) van x sal $f(x) < g(x)$

VRAAG 5 (GR12 NOV 2019 Vraag 4)

Hieronder is die grafieke van $f(x) = x^2 + bx - 3$ en $g(x) = \frac{a}{x+p}$

- f het 'n draaipunt by C en sny die x – as by (1; 0)
- D is die y –afsnit van beide f and g . Die grafieke f and g sny mekaar ook by E en J.
- Die vertikale asimptoot van g gaan deur die x –afsnit van f .



- 5.1 Skryf die waarde van p neer.
- 5.2 Toon aan dat $a = 3$ en $b = 2$.
- 5.3 Bereken die koördinate van C.
- 5.4 Gee die waardeversameling van f .
- 5.5 Bepaal die vergelyking van die lyn deur C wat 'n hoek van 45° met die positiewe x –as vorm. Gee jou antwoord in die vorm $y = \dots\dots$
- 5.6 Is die reguitlyn, wat in VRAAG 5.5 bepaal is, 'n raaklyn aan f ? Verduidelik jou antwoord.
- 5.7 Die funksie $h(x) = f(m - x) + q$ het slegs een x –afsnit by $x = 0$. Bepaal die waardes van m en q .

HERSIENING

GR 12 – CALCULUS

DIFFERENSIAALREKENE – OPSOMMING

Tipe Vraag	Opsomming van prosedure	Voorbeeld van vraag
1. Bepaal die limiet van eenvoudige funksies.	Verwyder die onbekende in noemer en vervang die waarde waarna geneig word in die uitdrukking.	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h-h^2}{h}$; $\lim_{a \rightarrow 6} \frac{a^2-36}{a-6}$
2. Bepaal die gemiddelde gradiënt tussen twee punte.	Benodig die koördinate van twee punte, gebruik formule om die gradiënt te bepaal	Indien $f(x) = 2x^3$, bepaal die gradient tussen $x = 1$ en $x = 2$
3. Bepaal die gradiënt by 'n punt.	Bepaal die afgeleide van die uitdrukking, vervang die x waarde van die punt	Indien $f(x) = 2x^3$, bepaal die gradient waar $x = 2$
4. Bepaal die afgeleide deur eerste beginsels.	Vanaf $f(x)$, bepaal $f(x + h)$ en gebruik die afgeide formule	Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = 2x^2$ vanaf eerste beginsels
5. Bepaal die afgeleide deur die gebruik van afgeleide reëls	Vereenvoudig die uitdrukking en bepaal die afgeleide. Let op na die uitleg van uitdrukking	Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{2}{x} - \sqrt{x} = 2(x + 1)$
6. Gebruik van verskillende notasies vir die afgeleide.	Let op na die uitleg van uitdrukking	$f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, D_x , $\frac{dA}{dx}$, $\frac{ds}{dt}$
7. Bepaal die draaipunte en horisontale punte van infleksie van kurwes	Stel die afgeleide gelyk aan nul, en vervang terug in oorspronklike vergelyking.	$y = x^2 - 3x - 4$
8. Bepaal die x afsnitte van die kubiese krommes	Stel $y = 0$, los die vergelyking op. Raai 1 ^{ste} faktor, faktoriseer verder ,benodig dalk formule kwadratiese vergelyking	Bepaal waar $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$ die x -as sny
9. Skets kubiese grafieke	Gebruik faktor stelling vir y afsnit, x afsnitte ,en vir draaipunt stel afgeleide = 0, skets	Skets die grafiek $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$
10. Bepaal die infleksie punte.	Stel 2 ^{de} afgeleide = 0 en vervang x waarde terrug in oorspronklike vergelyking.	Bepaal die punt van infleksie tussen die 2 stasionêre punte van $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$
11. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme.	$y = mx + c$, Vervang die x waarde in die afgeleide om m te bepaal. Vervang die x waarde in die oorspronklike vergelyking om 'n punt op die kurwe te kry. Gebruik die punt om c te bepaal.	Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme $y = 35x^2 - 4x + 1$ by die punt waar $x = 1$
12. Maksimeer en minimeer die lengtes, areas, volumes ens.	Bepaal 'n uitdrukking om die situasie voor te stel. Stel die afgeleide = 0, vervang x waarde terrug in die oorspronklike vergelyking.	

NOTA:

- Vrae in die hersiening is saamgestel uit vorige Nasionale eksamen vraestelle vir GR 12.

AFDELING A**VRAAG 1.** Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels indien gegee

1.1 $f(x) = 3x^2 - 5$ (5)

1.2 $f(x) = -x^2 + 4$ (5)

1.3 $f(x) = \frac{4}{x}$ (5)

1.4 $f(x) = x^3$ (5)

VRAAG 2. Bepaal :

2.1 $\frac{dy}{dx}$ if $y = 2x^5 + \frac{4}{x^3}$ (3)

2.2 $\frac{dy}{dx}$ if $y = (\sqrt{x} - x^2)^2$ (4)

2.3 $\frac{dy}{dx}$ if $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2$ (3)

2.4 die afgeleide van $f(x) = \left(x - \frac{3}{x}\right)^2$ (3)

2.5 die afgeleide van $p(x) = \left(\frac{1}{x^3} + 4x\right)^2$ (4)

2.6 $D_x \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$ (3)

2.7 $D_x \left[\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}x\right]$ (3)

VRAAG 3.

3.1 As $y = (x^6 - 1)^2$, bewys dat $\frac{dy}{dx} = 12x^5\sqrt{y}$, as $x > 1$. (3)

3.2 Gegee: $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 1$. Bepaal die interval waarvoor f konkaf opwaarts is. (4)

3.3 $g(x) = -8x + 20$ is 'n raaklyn aan $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 18$ by $x = 1$. Bereken die waardes van a en b . (5)

VRAAG 4

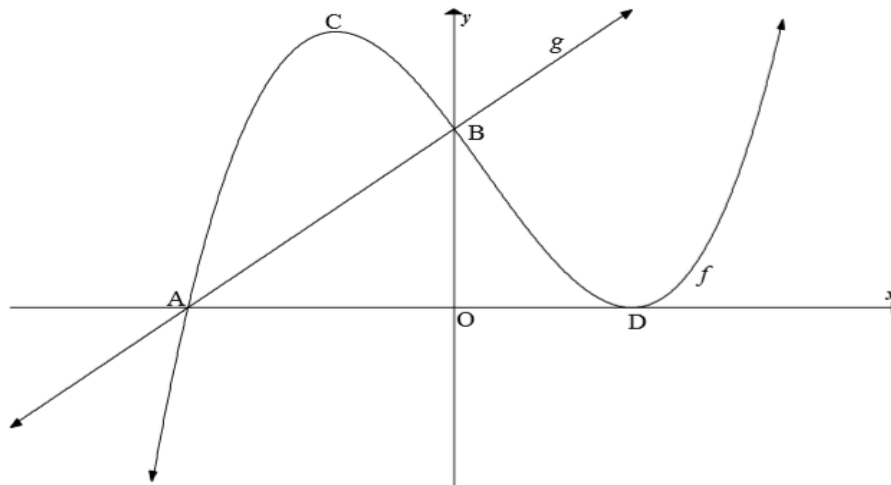
Gegee $f(x) = 2x^3 - 23x^2 + 80x - 84$

- 4.1 Bewys dat $(x - 2)$ 'n faktor van f is. (2)
- 4.2 Faktoriseer vervolgens of andersins $f(x)$ ten volle. (2)
- 4.3 Bepaal die x – koördinate van die draaipunt f . (4)
- 4.4 Skets die grafiek van f , en benoem ALLE draaipunte en sny punte met die asse duidelik. (3)
- 4.5 Bepaal die koördinate van die y – afsnit van die raaklyn aan f wat 'n helling van 40 het en wat f raak by 'n punt waar die x – koördinaat 'n heelgetal is. (6)

VRAAG 5

Die skets hieronder toon die grafieke van $f(x) = (x -)^2(x - k)$ en $g(x) = mx + 12$.

- A en D is die x – afsnitte van f .
- B is die gemene y – afsnit van f en g .
- C en D is die draaipunte van f .
- Die reguitlyn g gaan deur A.



- 5.1 Skryf neer die y - koördinaat van B. (1)
- 5.2 Bepaal die x - koördinaat van A. (3)
- 5.3 Indien $k = -3$, bepaal die coördinate van C. (6)
- 5.4 Vir watter waardes van x sal f konkaaf afwaarts wees. (3)

VRAAG 6

Gegee : $h(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ en $g(x) = -12x$. P en Q(2; 10) is die draaipunte van h . Die grafiek van h gaan deur die oorsprong.

- 6.1 Toon aan dat $a = \frac{3}{2}$ en $b = 6$. (5)
- 6.2 Bepaal die gemiddelde gradiënt van h tussen P en Q, indien dit gegee word dat $x = -1$ by P? (4)
- 6.3 Toon aan dat die konkawiteit h verander by $x = \frac{1}{2}$. (3)
- 6.4 Verduidelik die betekenis van die verandering VRAAG 6.3 met betrekking tot h . (1)
- 6.5 Bepaal die waarde van x , gegee $x < 0$, waar die raaklyn aan h ewewydig aan g is. (4)

VRAAG 7

Gegee : $f(x) = (x + 2)(x^2 - 6x + 9)$
 $= x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

- 7.1 Bepaal die koördinate van die draaipunte van die grafiek f . (6)
- 7.2 Skets die grafiek van f , en benoem ALLE draaipunte en sny punte met die asse duidelik. (4)
- 7.3 Vir watter waardes van x sal $x \cdot f'(x) < 0$ (3)

VRAAG 8

Gegee : $f(x) = 3x^3$

- 8.1 Los op $f(x) = f'(x)$ (3)
- 8.2 Die grafieke f , f' en f'' , gaan almal deur die punt $(0; 0)$
- 8.2.1 Vir watter van die grafieke sal $(0; 0)$ 'n stasionêre punt wees. (1)
- 8.2.2 Verduidelik die verskil, indien enige, in die stasionêre punte waarna daar in VRAAG 8.2.1 verwys word. (2)
- 8.3 Bepaal die vertikale afstand tussen die grafieke van f' en f'' by $x = 1$ (3)
- 8.4 Vir watter waarde(s) van x is $f(x) - f'(x) < 0$ (4)

HERSIENING

GR 12 – Finansies

FINANSIES – OPSOMMING

FORMULES	
Enkelvoudige Rente	$A = P(1 + in)$
Saamgestelde Rente	$A = P(1 + i)^n$
Reglynige waardevermindering	$A = P(1 - in)$
Verminderende saldo waardevermindering	$A = P(1 - i)^n$
Effektiewe en Nominale rentekoers	$1 + i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m$
Som van 'n Meetkundige reeks	$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ or $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $r \neq 1$
A	Finale bedrag
P	Oorspronklike bedrag
i	Rentekoers per periode
n	Die aantal keer wat rente bereken word
i_{eff}	Die effektiewe jaarlikse rentekoers
i_{nom}	Is die gekwoteerde jaarlikse nominale rentekoers.
m	Is die aantal keer wat rente bereken word in een jaar.
Toekomstige waarde Annuïteit	$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$
Huidige waarde Annuïteit	$P = \frac{x[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$
n	Is die aantal betalings

NOTA:

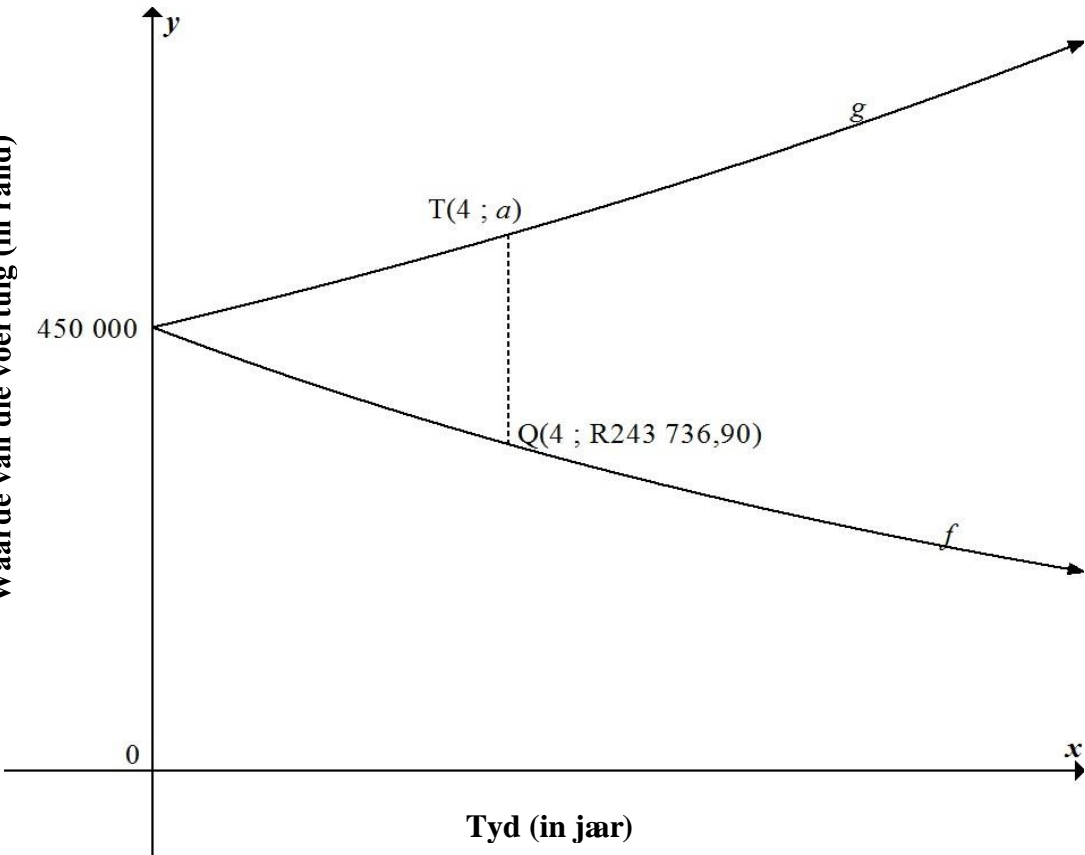
- Vrae in die hersiening is saamgestel uit vorige Nasionale eksamen vraestelle vir GR 12

AFDELING A

VRAAG 1 DBE		
1.1	<p>Anisha en Lindiwe het elk R12 000 ontvang om vir 'n tydperk van 5 jaar te belê. Hulle het die geld op dieselfde tyd volgens die volgende opsies bele:</p> <ul style="list-style-type: none"> Anisha: 8,5% p.j. enkelvoudige rente. Sy sal aan die einde van die 5 jaar 'n addisionele bonusuitbetaling ontvang van presies 7,5% van die oorspronklike bedrag bele. Lindiwe: 8,5% p.j. kwartaalliks saamgestel. <p>Wie sal na 5 jaar die groter finale bedrag hê? Motiveer jou antwoord met gepaste berekeninge.</p>	(6)
1.2	<p>'n Besigheid het kantoormeubels ter waarde van R120 000 gekoop. Na hoeveel jaar sal die meubels se waarde tot R41 611,57 volgens die verminderdesaldo-metode verminder, indien die waardevermindingskoers 12,4% p.j. is?</p>	(4)
1.3	<p>Tebogo het 'n spaarrekening met 'n enkele deposito van R5 000 aan die begin van Junie 2015 oopgemaak. Hy het toe vanaf die einde van Junie 2015, 24 maandelikse deposito's van R800 aan die einde van elke maand gemaak. Die rekening het rente van 15% p.j., maandeliks saamgestel, verdien.</p> <p>Bereken die bedrag wat onmiddellik nadat hy sy laaste deposito gemaak het, in sy spaarrekening moet wees.</p>	(5)
		[15]
VRAAG 2		
2.1	<p>Presies vyf jaar gelede het Mpume 'n nuwe motor vir R145 000 gekoop. Die huidige boekwaarde van die motor is R72 500. Indien die motor se waarde teen 'n vaste jaarlikse koers volgens die verminderendesaldo-metode depresieer, bereken die depresiasiekoers.</p>	(3)
2.2	<p>Samuel het 'n huislening van R500 000 uitgeneem teen 'n rentekoers van 12% per jaar, maandeliks saamgestel. Hy beplan om hierdie lening oor 20 jaar terug te betaal, en sy eerste betaling word een maand nadat die lening toegestaan is, gemaak.</p>	
2.2.1	<p>Bereken die waarde van Samuel se maandelikse paaiement.</p>	(4)
2.2.2	<p>Melissa het 'n lening vir dieselfde bedrag en teen dieselfde rentekoers as Samuel uitgeneem. Melissa het besluit om R6 000 aan die einde van elke maand terug te betaal. Bereken hoeveel maande dit Melissa geneem het om haar lening volledig af te betaal.</p>	(4)
2.2.3	<p>Wie betaal meer rente, Samuel of Melissa? Motiveer jou antwoord.</p>	(2)
		[13]

VRAAG 3		
'n Lening van R250 000 is op 1 Junie 2016 deur 'n bank aan Thabiso toegestaan teen 'n rentekoers van 15% p.j., maandeliks saamgestel, om 'n motor te koop. Thabiso het ingestem om die lening af te betaal deur maandelikse paaieimente te betaal wat op 1 Julie 2016 sou begin en 4 jaar later op 1 Junie 2020 sou eindig. Thabiso kon egter nie die eerste twee paaieimente betaal nie en het eers op 1 September 2016 met die maandelikse paaieimente begin.		
3.1	Bereken die bedrag wat Thabiso die bank op 1 Augustus 2016 geskuld het, 'n maand voordat hy sy eerste maandelikse paaieiment betaal het.	(2)
3.2	Sy eerste maandelikse paaieiment is op 1 September 2016 betaal, en Thabiso gaan steeds sy laaste maandelikse paaieiment op 1 Junie 2020 betaal. Bereken sy maandelikse paaieiment.	(4)
3.3	As Thabiso R9 000 as sy maandelikse paaieiment vanaf 1 September 2016 betaal, hoeveel maande vroeër kan hy sy lening afbetaal?	(5)
3.4	As Thabiso R9 000 as 'n maandelikse paaieiment vanaf 1 September 2016 betaal, bereken die laaste paaieiment wat hy moet betaal om die lening af te betaal.	(4)
		[15]
VRAAG 4		
4.1	Hoe lank sal dit die prys van 'n bate neem om met 'n derde van sy oorspronklike waarde te verminder, indien dit teen 'n koers van 4,7% p.j. op 'n verminderde saldo depresieer?	(4)
4.2	Lebogo het op 1 April 2016 'n trekker vir Rx gekoop. <ul style="list-style-type: none"> Sy sal hierdie trekker inruil wanneer sy dit oor vyf jaar op 1 April 2021 met 'n soortgelyke een vervang. Die trekker depresieer teen 20% p.j. volgens die verminderdesaldo-metode. Die prys van 'n soortgelyke trekker styg jaarliks met 18%. Lebogo bereken dat as sy R8 000 per maand in 'n delgingsfonds deponeer wat rente van 10% p.j. maandeliks saamgestel, betaal, sy genoeg geld sal hê om die vervangingskoste van die trekker te dek. Sy het op 30 April 2016 die eerste deposito in die fonds gemaak en sal tot 31 Maart 2021 voortgaan om dit aan die einde van elke maand te doen. 	
4.2.1	Bepaal, in terme van x , wat die boekwaarde van die huidige trekker op 1 April 2021 sal wees (dit is, 5 jaar nadat die trekker aangekoop is). Gee jou antwoord korrek tot VYF desimale plekke.	(2)
4.2.2	Bepaal, in terme van x , wat die prys van 'n soortgelyke nuwe trekker op 1 April 2021 sal wees. Gee jou antwoord korrek tot VYF desimale plekke	(2)
4.2.3	Bereken die bedrag wat op 1 April 2021 in die delgingsfonds opgehoop sal wees.	(4)
4.2.4	Bereken die waarde van x , die prys van die huidige trekker. Rond jou antwoord tot die naaste duisend af.	(4)
		[16]

VRAAG 5.

	<p>Die grafiek van f toon die boekwaarde van 'n voertuig x jaar nadat Joe dit gekoop het. Die grafiek van g toon die kosprys van 'n soortgelyke nuwe voertuig x jaar later.</p> 	
5.1	Hoeveel het Joe vir die voertuig betaal?	(1)
5.2	Gebruik die verminderdesaldo-metode om die persentasie jaarlikse waardeverminderingkoers te bereken van die voertuig wat Joe gekoop het.	(4)
5.3	Indien die gemiddelde koers van die voertuig se prysverhoging 8,1% p.j. is, bereken die waarde van a .	(3)
5.4	<p>'n Voertuig wat tans R450 000 kos, moet aan die einde van 4 jaar vervang word. Die ou voertuig sal ingeruil word. 'n Delgingsfonds word geskep om die vervangingskoste van hierdie voertuig te dek. Betalings sal aan die einde van elke maand gemaak word. Die eerste betaling sal aan die einde van die 13^{de} maand gemaak word en die laaste betaling sal aan die einde van die 48^{ste} maand gemaak word. Die delgingsfonds verdien rente teen 'n koers van 6,2% p.j., maandeliks saamgestel.</p> <p>Bereken die maandelikse betaling aan die fonds.</p>	(5)
		[13]

	VRAAG 6.		
	Siphokazi het 'n huis gekoop. Sy het 'n deposito van R102 000 betaal, wat aan 12% van die verkoopprijs van die huis gelykstaande is. Sy het 'n lening by die bank gekry om die balans van die verkoopprijs te betaal. Die bank vra haar 'n rentekoers van 9% per jaar, maandeliks saamgestel.		
6.1		Bepaal die verkoopprijs van die huis.	(1)
6.2		Die leningstermyn is 20 jaar en sy begin die lening een maand nadat dit toegestaan is, terugbetaal. Bereken haar maandelikse paaierment	(4)
6.3		Hoeveel rente sal sy oor die tydperk van 20 jaar betaal? Rond jou antwoord korrek tot die naaste rand af.	(2)
6.4		Bereken die balans van haar lening direk na haar 85 ^{ste} paaierment.	(3)
6.5		Sy het finansiële probleme na die 85 ^{ste} paaierment ondervind en het vir 4 maande geen verdere betalings gemaak nie (dit wil sê, maand 86 tot 89). Bereken hoeveel Siphokazi aan die einde van die 89 ^{ste} maand op haar verband skuld.	(2)
6.6		Sy besluit om haar terugbetaling na R8 500 per maand te verhoog van die einde van die 90 ^{ste} maand af. Hoeveel maande sal dit neem om haar verband terug te betaal na die nuwe paaierment van R8 500 per maand?	(4)
			[16]

TRIGONOMETRIE

1. DEFINISIES; IDENTITEITE EN FORMULES

TRIG OPSOMMING (Graad 12)



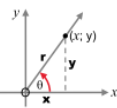
► HOEKE IN STANDAARDPOSISIES

- Positiewe \angle^e**
(antiklokgewys van 0° tot 360°):
- Negatiewe \angle^e**
(klokgewys van 0° tot -360°):

Ook moontlik:

► DIE VERHOUDINGS & hulle

• Definisies:



• Tekens:

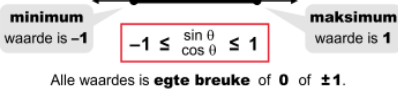
$\sin \theta$ is positief in **I & II**
 $\cos \theta$ is positief in **I & IV**
 $\tan \theta$ is positief in **I & III**

• Kritieke waardes:

$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
$\frac{y}{r}$ (T/S)	$\frac{x}{r}$ (A/S)	$\frac{y}{x}$ (T/A)
II I	I IV	I III
1 0 -1	0 -1 1	$-\infty$ to 1 0 1 to $-\infty$

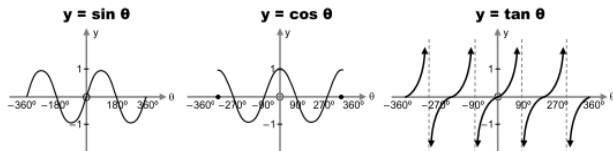
• Minimum & Maksimum waardes van $\sin \theta$ & $\cos \theta$:

Die waardes van $\sin \theta$ & $\cos \theta$ strek van -1 tot 1 .



Alle waardes is **egte breuke** of 0 of ± 1 .

• Grafieke:



► IDENTITEITE

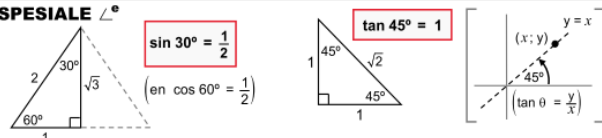
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\& \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

► SPESIALE \angle^e



& hul 'families':

	30° 'familie'	60° 'familie'	45° 'familie'	
II	150°	120°	135°	$\leftarrow 180^\circ - \bullet$ $\leftarrow 180^\circ + \bullet$ $\leftarrow 360^\circ - \bullet$
III	210°	240°	225°	
IV	330°	300°	315°	

► ALGEMENE VORME

ENIGE verhouding $\begin{pmatrix} 180^\circ \pm \theta \\ 360^\circ - \theta \\ -\theta \end{pmatrix} = \pm$ daardie **SELFDE** verhouding van θ

► KO-VERHOUDINGS (sinus en kosinus)

- $90^\circ - \theta$ ('n skerphoek)
 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$
 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$
- $90^\circ + \theta$ ('n stomphoek)
 $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$
 $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$

Die verhouding **VERANDER** na die KO-verhouding.

► OPLOSSING VAN Δ^e

In **Reghoekige Δ^e** , gebruik ons:
 • Gewone trig. verhoudings • die Stelling van Pythagoras • Oppv. = $\frac{1}{2} bh$

In **Nie-Reghoekige Δ^e** , gebruik ons:

- Sinusreël:** $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
- Kosinusreël:** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
- Oppervlakte-eël:** **OPPV.** = $\frac{1}{2} ab \sin C$

Maar ook: Oppv. van $\Delta = \frac{1}{2} bh$

► SAAMGESTELDE \angle^e

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

► DUBBEL \angle^e

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 $= 1 - 2 \sin^2 x$
 $= 2 \cos^2 x - 1$

Afdeling A:

Let Wel:

- Vrae in hierdie hersiening is saamgestel uit nasionale eksamen vraestelle vir GR 12.

AFDELING A (Roetine vrae)

VRAAG 1

(GR12 NSC NOV 2019)

1.1 1.1.1 Vereenvoudig die volgende uitdrukking tot EEN trigonometriese term:

$$\frac{\sin x}{\cos x \cdot \tan x} + \sin(180^\circ + x) \cos(90^\circ - x)$$

1.1.2 **Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik**, bepaal die waarde van:

$$\frac{\sin^2 35^\circ - \cos^2 35^\circ}{4 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

(GR12 NSC NOV 2017)

1.2 Gegee: $\frac{\sin(A - 360^\circ) \cdot \cos(90^\circ + A)}{\cos(90^\circ - A) \cdot \tan(-A)}$

Vereenvoudig die uitdrukking tot 'n enkele trigonometriese verhouding.

(GR12 NSC NOV 2017)

1.3 Bewys:

1.3.1 $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \cdot \sin B$

1.3.2 **Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, dat $\sin 77^\circ - \sin 43^\circ = \sin 17^\circ$

(GR12 NSC Maart 2018)

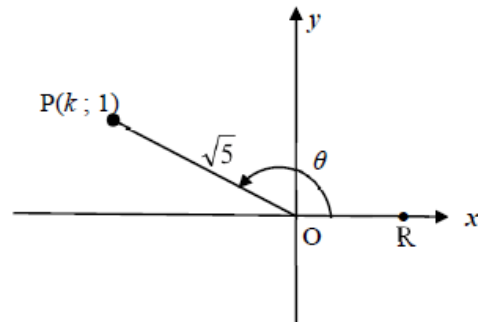
1.4 Vereenvoudig: $\sin(180^\circ - x) \cdot \cos(-x) + \cos(90^\circ + x) \cdot \cos(x - 180^\circ)$
tot 'n enkele trigonometriese verhouding.

1.5 Bepaal die waarde van $\sin 3x \cdot \cos y + \cos 3x \cdot \sin y$ as $3x + y = 270^\circ$

VRAAG 2

(GR12 NSC NOV 2018)

2.1 In die diagram is $P(k; 1)$ 'n punt in die 2^{de} kwadrant, $\sqrt{5}$ eenhede vanaf die oorsprong. R is 'n punt op die positiewe x -as en stomphoek $\widehat{ROP} = \theta$.



2.1.1 Bereken die waarde van k .

2.1.2 Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van:

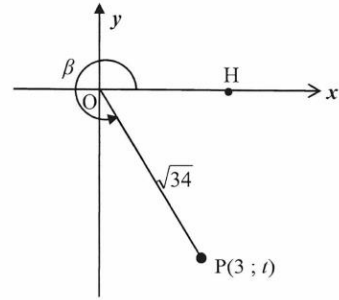
a) $\tan \theta$

b) $\cos(180^\circ + \theta)$

c) $\sin(\theta + 60^\circ)$ in die vorm $\frac{a+b}{\sqrt{20}}$

(GR12 NSC NOV 2017)

- 2.2 In die diagram, is $P(3; t)$ 'n punt in die Cartesiese vlak.
 $OP = \sqrt{34}$ en $\widehat{HOP} = \beta$ is 'n reflekshoek.
 Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van:
- 2.2.1. t
 - 2.2.2. $\tan \beta$
 - 2.2.3. $\cos 2\beta$

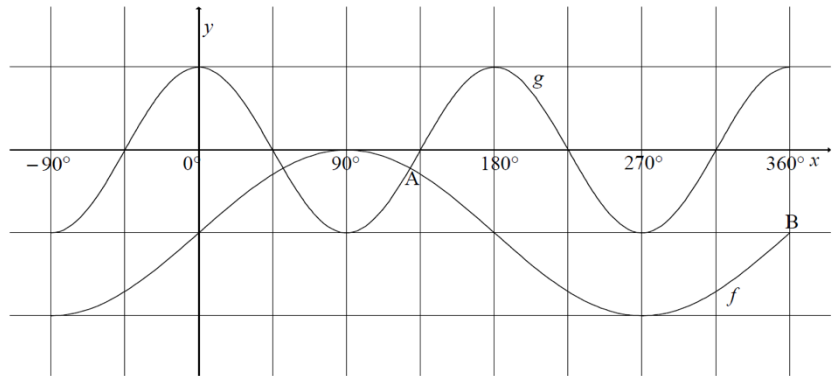


(GR12 NSC Maart 2018)

- 2.3 As $\cos 2\theta = -\frac{5}{6}$, waar $2\theta \in [180^\circ; 270^\circ]$, bereken, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waardes in eenvoudigste vorm van:
- 2.3.1 $\sin 2\theta$
 - 2.3.2 $\sin^2 \theta$

VRAAG 3

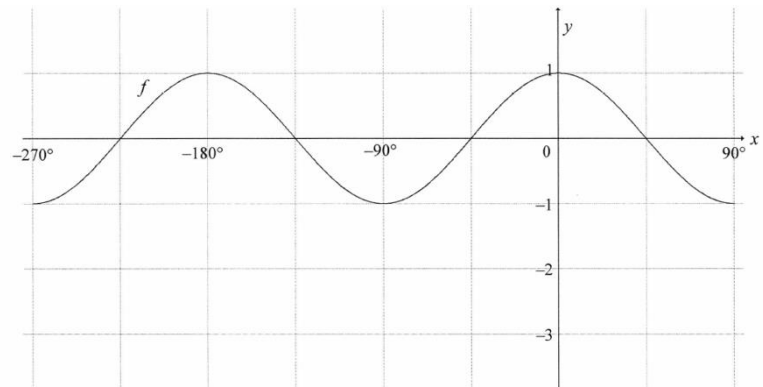
- 3.1 In die diagram, is die grafieke van
 $f(x) = \sin x - 1$ en
 $g(x) = \cos 2x$ vir die interval
 $x \in [-90^\circ; 360^\circ]$
 geskets. Grafieke f en
 g sny by A.
 $B(360^\circ; -1)$ is 'n punt op f .



- 3.1.1 Skryf die waardeversameling van f neer.
- 3.1.2 Skryf die waardes van x in die interval $x \in [-90^\circ; 360^\circ]$ waarvoor die grafiek f afnemend is.

(GR 12 NSC November 2017)

- 3.2 In die diagram, is die grafiek van $f(x) = \cos 2x$ vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$ geskets.



- 3.2.1 Skets die grafiek van $g(x) = 2\sin x - 1$ vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$ op 'n gegewe rooster. Toon AL die afsnitte met die asse asook die draaipunte.
- 3.2.2 Gestel A is 'n snypunt van die grafieke van f en g . Toon aan dat die x -koördinaat van A die vergelyking $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, bevredig.
- 3.2.3 Bereken vervolgens die koördinate van die snypunte van grafieke van f en g vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$.

