



Wiskunde

HERSIENINGSBOEK 2025 KWARTAAL 3

Graad 12

Hierdie hersieningsprogram is ontwikkel om jou te help met die hersiening van belangrike inhoud en vaardighede wat gedurende die derde kwartaal onderrig is. Die doel is om jou voor te berei om die kernkonsepte te verstaan. Dit wil jou ook die geleentheid bied om die verwagte standaard en toepassing van kennis te verkry wat nodig is om sukses in die NSS-eksamen te behaal.

Die hersieningsprogram handel oor die volgende onderwerpe:

- Finansiële Wiskunde (± 15 van 150 punte in Vraestel 1)
- Waarskynlikheid (± 15 van 150 punte in Vraestel 1)
- Statistiek (± 20 van 150 punte in Vraestel 2)
- Trigonometrie (± 50 van 150 punte in Vraestel 2)

Liewe Leerder

Die hersienings materiaal vir kwartaal 3 is:

- Finansiële Wiskunde (± 15 van 150 punte in Vraestel 1)
- Waarskynlikheid (± 15 van 150 punte in Vraestel 1)
- Statistiek (± 20 van 150 punte in Vraestel 2)
- Trigonometrie (± 50 van 150 punte in Vraestel 2)

Finansiële Wiskunde, Waarskynlikheid en Trigonometrie, is soos volg saamgestel:

- 'n Opsomming van kern konsepte in die onderwerp.
- Afdeling A, noodsaaklike vrae wat die leerders moet kan beantwoord om ten minste 30% in Wiskunde te verkry.
- Afdeling B, dit is vrae op 'n hoër vlak en is gemik op leerders wat 50% en meer wil behaal.

Maak asseblief seker om deeglik deur die opsomming van die kern konsepte aan die begin van elke onderwerp te werk. Dit is noodsaaklik voordat julle begin met hersiening vrae van vraestelle. Indien enige gedeelte van die notas nie verstaanbaar is nie is dit belangrik dat jy ondersteuning daarin ontvang. Enige probleme wat ondervind word dui aan op 'n tekortkoming in die verstaan van sommige konsepte wat dan die voltooiing van die vrae oor die onderwerp sal belemmer. Maak seker dat jy ondersteuning kry vanaf 'n tutor, onderwyser, raadpleeg jou handboek of kry aanlyn ondersteuning. Jy kan ook gebruik maak van die tutonic videos om sekere konsepte beter te verstaan.

Deur die druk van die skakel, https://westerncape-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/razzia_ebrahim_westerncape_gov_za/Ecexc5QG6-1locxgbmJKJDQBh5dnnR00eqzJmOhfNuAJiw?e=AWtIIU, kry u toegang tot 'n pdf met breinkaarte oor al die verskillende onderwerpe in graad 12.

Om ondersteuning te kry oor 'n gegewe onderwerp,

- Gaan na die breinkaart oor die onderwerp.
- Die geheuekaart weerspieël konsepte oor die onderwerp van graad 10 - 12. Klik op die bal langs die konsep om toegang tot die video te kry.

Deur die druk van die blou balletjies by die bostaande breinkaarte kry jy toegang tot die video wat die konsepte langs die bolletjie verduidelik.

Nadat jy deur die opsomming van die onderwerpe gewerk het begin om die vrae oor die onderwerp te beantwoord. Toets jou antwoorde gereeld soos julle deur die materiaal vorder. Al die oplossings is beskikbaar in die Tutorgids. Dit is belangrik om te weet of jou antwoorde reg is voordat jy vorder na die volgende vrae. Jy sal baie leer deur te kyk na die oplossings asook na die uitleg van die oplossing. As jy nie instaat is om 'n spesifieke vraag te begin nie, is dit goed dat jy eers na die memorandum kyk want dit is deel van die leerproses. Merk die vraag en maak seker om dit weer 'n dag later te probeer. Spandeer ten minste 2 ure per dag aan Wiskunde hersiening.

Baie dankie dat jy elke dag jou Wiskunde hersien in jou voorbereiding vir die eksamen. Die besef van gereelde werk in Wiskunde is die belangrikste tot sukses in die vak.

Als van die beste!!!!

INHOUDSBLAD

INHOUD

BLADSY

FINANSIËLE WISKUNDE

- OPSOMMING 4
- HERSIENING VRAE 5 – 7

WAARSKYNLIKHEID

- OPSOMMING 8 – 9
- AFDELING A 10 – 13
- AFDELING B 14 – 15

STATISTIEK

- OPSOMMING 16 – 21
- HERSIENING VRAE 22 – 26

TRIGONOMETRIE

- OPSOMMING 27 – 31
- AFDELING A 32 – 34
- AFDELING B 35 – 38

Finansiële Wiskunde

FINANSIES – OPSOMMING

FORMULES	
Enkelvoudige Rente	$A = P(1 + in)$
Saamgestelde Rente	$A = P(1 + i)^n$
Reglynige waardevermindering	$A = P(1 - in)$
Verminderende saldo waardevermindering	$A = P(1 - i)^n$
Effektiewe en Nominale rentekoers	$1 + i_{eff} = \left(1 + \frac{i_{nom}}{m}\right)^m$
Som van 'n Meetkundige reeks	$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ or $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, $r \neq 1$
A	Finale bedrag
P	Oorspronklike bedrag
i	Rentekoers per periode
n	Die aantal keer wat rente bereken word
i_{eff}	Die effektiewe jaarlikse rentekoers
i_{nom}	Is die gekwoteerde jaarlikse nominale rentekoers.
m	Is die aantal keer wat rente bereken word in een jaar.
Toekomstige waarde Annuïteit	$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$
Huidige waarde Annuïteit	$P = \frac{x[1 - (1+i)^{-n}]}{i}$
n	Is die aantal betalings

NOTA:

- Vrae in die hersiening is saamgestel uit vorige Nasionale eksamen vraestelle vir GR 12

Afdeling A:

VRAAG 1

- 1.1 Anisha en Lindiwe het elk R12 000 ontvang om vir 'n tydperk van 5 jaar te belê. Hulle het die geld op dieselfde tyd volgens die volgende opsies bele:
- Anisha: 8,5% p.j. enkelvoudige rente. Sy sal aan die einde van die 5 jaar 'n addisionele bonusuitbetaling ontvang van presies 7,5% van die oorspronklike bedrag bele.
 - Lindiwe: 8,5% p.j. kwartaalliks saamgestel.
- Wie sal na 5 jaar die groter finale bedrag hê? Motiveer jou antwoord met gepaste berekeninge. (6)
- 1.2 'n Besigheid het kantoormeubels ter waarde van R120 000 gekoop. Na hoeveel jaar sal die meubels se waarde tot R41 611,57 volgens die verminderdesaldo-metode verminder, indien die waardeverminderingkoers 12,4% p.j. is? (4)
- 1.3 Tebogo het 'n spaarrekening met 'n enkele deposito van R5 000 aan die begin van Junie 2015 oopgemaak. Hy het toe vanaf die einde van Junie 2015, 24 maandelikse deposito's van R800 aan die einde van elke maand gemaak. Die rekening het rente van 15% p.j., maandeliks saamgestel, verdien. Bereken die bedrag wat onmiddellik nadat hy sy laaste deposito gemaak het, in sy spaarrekening moet wees. (5)

[15]

VRAAG 2

- 2.1 Presies vyf jaar gelede het Mpume 'n nuwe motor vir R145 000 gekoop. Die huidige boekwaarde van die motor is R72 500. Indien die motor se waarde teen 'n vaste jaarlikse koers volgens die verminderendesaldo-metode depresieer, bereken die depresiasiekoers. (3)
- 2.2 Samuel het 'n huislening van R500 000 uitgeneem teen 'n rentekoers van 12% per jaar, maandeliks saamgestel. Hy beplan om hierdie lening oor 20 jaar terug te betaal, en sy eerste betaling word een maand nadat die lening toegestaan is, gemaak.
- 2.2.1 Bereken die waarde van Samuel se maandelikse paaient. (4)
- 2.2.2 Melissa het 'n lening vir dieselfde bedrag en teen dieselfde rentekoers as Samuel uitgeneem. Melissa het besluit om R6 000 aan die einde van elke maand terug te betaal. Bereken hoeveel maande dit Melissa geneem het om haar lening volledig af te betaal. (4)
- 2.2.3 Wie betaal meer rente, Samuel of Melissa? Motiveer jou antwoord. (2)

[13]

VRAAG 3

'n Lening van R250 000 is op 1 Junie 2016 deur 'n bank aan Thabiso toegestaan teen 'n rentekoers van 15% p.j., maandeliks saamgestel, om 'n motor te koop. Thabiso het ingestem om die lening af te betaal deur maandelikse paaientemente te betaal wat op 1 Julie 2016 sou begin en 4 jaar later op 1 Junie 2020 sou eindig. Thabiso kon egter nie die eerste twee paaientemente betaal nie en het eers op 1 September 2016 met die maandelikse paaientemente begin.

- 3.1 Bereken die bedrag wat Thabiso die bank op 1 Augustus 2016 geskuld het, 'n maand voordat hy sy eerste maandelikse paaientement betaal het. (2)

- 3.2 Sy eerste maandelikse paaieiment is op 1 September 2016 betaal, en Thabiso gaan steeds sy laaste maandelikse paaieiment op 1 Junie 2020 betaal. Bereken sy maandelikse paaieiment. (4)
- 3.3 As Thabiso R9 000 as sy maandelikse paaieiment vanaf 1 September 2016 betaal, hoeveel maande vroeër kan hy sy lening afbetaal? (5)
- 3.4 As Thabiso R9 000 as 'n maandelikse paaieiment vanaf 1 September 2016 betaal, bereken die laaste paaieiment wat hy moet betaal om die lening af te betaal. (4)

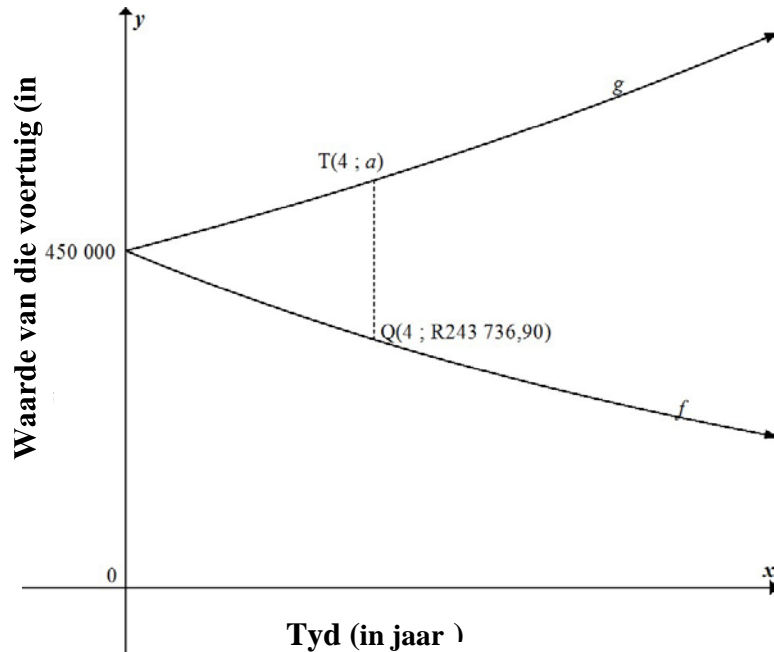
[15]**VRAAG 4**

- 4.1 Hoe lank sal dit die prys van 'n bate neem om met 'n derde van sy oorspronklike waarde te verminder, indien dit teen 'n koers van 4,7% p.j. op 'n verminderde saldo depresieer? (4)
- 4.2 Lebogo het op 1 April 2016 'n trekker vir R x gekoop.
1. Sy sal hierdie trekker inruil wanneer sy dit oor vyf jaar op 1 April 2021 met 'n soortgelyke een vervang.
 2. Die trekker depresieer teen 20% p.j. volgens die verminderdesaldo-metode.
 3. Die prys van 'n soortgelyke trekker styg jaarliks met 18%.
 4. Lebogo bereken dat as sy R8 000 per maand in 'n delgingsfonds deponer wat rente van 10% p.j. maandeliks saamgestel, betaal, sy genoeg geld sal hê om die vervangingskoste van die trekker te dek. Sy het op 30 April 2016 die eerste deposito in die fonds gemaak en sal tot 31 Maart 2021 voortgaan om dit aan die einde van elke maand te doen.
- 4.2.1 Bepaal, in terme van x , wat die boekwaarde van die huidige trekker op 1 April 2021 sal wees (dit is, 5 jaar nadat die trekker aangekoop is). Gee jou antwoord korrek tot VYF desimale plekke. (2)
- 4.2.2 Bepaal, in terme van x , wat die prys van 'n soortgelyke nuwe trekker op 1 April 2021 sal wees. Gee jou antwoord korrek tot VYF desimale plekke (2)
- 4.2.3 Bereken die bedrag wat op 1 April 2021 in die delgingsfonds opgehoop sal wees. (4)
- 4.2.4 Bereken die waarde van x , die prys van die huidige trekker. Rond jou antwoord tot die naaste duisend af. (4)

[16]

VRAAG 5.

Die grafiek van f toon die boekwaarde van 'n voertuig x jaar nadat Joe dit gekoop het. Die grafiek van g toon die kosprys van 'n soortgelyke nuwe voertuig x jaar later.



- 5.1 Hoeveel het Joe vir die voertuig betaal? (1)
- 5.2 Gebruik die verminderdesaldo-metode om die persentasie jaarlikse waardeverminderingkoers te bereken van die voertuig wat Joe gekoop het. (4)
- 5.3 Indien die gemiddelde koers van die voertuig se prysverhoging 8,1% p.j. is, bereken die waarde van a . (3)
- 5.4 'n Voertuig wat tans R450 000 kos, moet aan die einde van 4 jaar vervang word. Die ou voertuig sal ingeruil word. 'n Delgingsfonds word geskep om die vervangingskoste van hierdie voertuig te dek. Betalings sal aan die einde van elke maand gemaak word. Die eerste betaling sal aan die einde van die 13^{de} maand gemaak word en die laaste betaling sal aan die einde van die 48^{ste} maand gemaak word. Die delgingsfonds verdien rente teen 'n koers van 6,2% p.j., maandeliks saamgestel. Bereken die maandelikse betaling aan die fonds. (5)
- [13]**

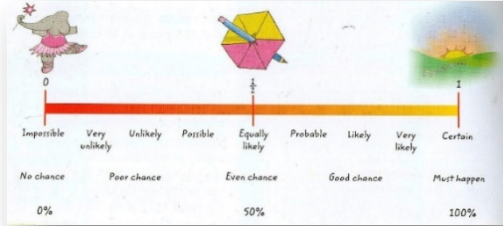
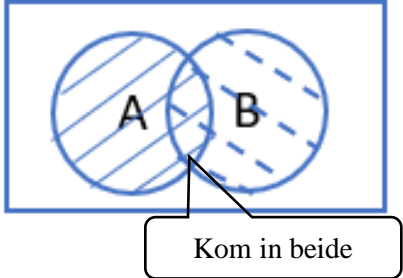
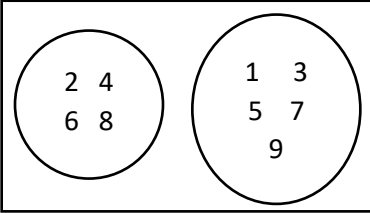
VRAAG 6.

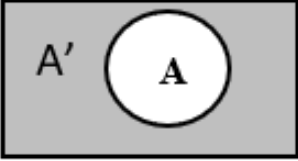
Siphokazi het 'n huis gekoop. Sy het 'n deposito van R102 000 betaal, wat aan 12% van die verkoopprijs van die huis gelykstaande is. Sy het 'n lening by die bank gekry om die balans van die verkoopprijs te betaal. Die bank vra haar 'n rentekoers van 9% per jaar, maandeliks saamgestel.

- 6.1 Bepaal die verkoopprijs van die huis. (1)
- 6.2 Die leningstermyn is 20 jaar en sy begin die lening een maand nadat dit toegestaan is, terugbetaal. Bereken haar maandelikse paaiement (4)
- 6.3 Hoeveel rente sal sy oor die tydperk van 20 jaar betaal? Rond jou antwoord korrek tot die naaste rand af. (2)
- 6.4 Bereken die balans van haar lening direk na haar 85^{ste} paaiement. (3)
- 6.5 Sy het finansiële probleme na die 85^{ste} paaiement ondervind en het vir 4 maande geen verdere betalings gemaak nie (dit wil sê, maand 86 tot 89). Bereken hoeveel Siphokazi aan die einde van die 89^{ste} maand op haar verband skuld. (2)
- 6.6 Sy besluit om haar terugbetaling na R8 500 per maand te verhoog van die einde van die 90^{ste} maand af. Hoeveel maande sal dit neem om haar verband terug te betaal na die nuwe paaiement van R8 500 per maand? (4)

[16]

Waarskynlikheid Hersiening

<p>Waarskynlikheid van 'n gebeurtenis:</p> $P(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomst}}{\text{aantal moontlike uitkomst}}$ $= \frac{n(A)}{n(S)}$ <p>[Op Informasiebladsy!]</p>		<p>Voorbeeld: Skiet van 'n muntstuk.</p> <p>Die uitkoms kan kop of stert wees Dus:</p> $P(\text{Kop}) = \frac{1}{2}$
<p>Onafhanklike gebeurtenisse: Die twee gebeurtenisse beïnvloed nie mekaar nie.</p> <p>Vermenigvuldiging reël : $P(A \text{ and } B) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$</p>	<p>Daar is 'n sak met 2 rooi en 3 blou balle.</p> <p>Gebeurtenis 1: $P(\text{rooi}) = \frac{2}{5}$</p> <p>Die balle word terug geplaas!</p> <p>Gebeurtenis 2: $P(\text{blou}) = \frac{3}{5}$</p> <p>$P(\text{Rooi en blou}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$</p>	<p>Die gebeurtenisse A en B is onafhanklik. $P(A) = 0,4$ en $P(B) = 0,5$</p> <p>Bepaal:</p> <ul style="list-style-type: none"> $P(A \text{ en } B)$ $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$ $= 0,4 \times 0,5$ $= 0,2$
<p>Onderling insluitende gebeurtenisse:</p> <p>A en B is onderling insluitend as die gebeurtenisse elemente in gemeen het.</p> <p>Optellingsreël: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$</p>		<ul style="list-style-type: none"> $P(A \text{ of } B)$ $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$ $= 0,4 + 0,5 - 0,2$ $= 0,7$
<p>Onderling uitsluitende gebeure. A en B is onderling uitsluitend as daar geen gemene elemente is nie.</p> <p>Dus: $P(A \text{ en } B) = 0$</p> <p>Die Optellingsreël word: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B)$ $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - 0$ $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$</p>		<p>As gebeure A en B onderling uitsluitend is en</p> <ul style="list-style-type: none"> $P(A) = 0,1$ $P(B) = 0,3$ <p>Bereken $P(A \text{ of } B)$</p> <p>Oplossing: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$ $= 0,1 + 0,3$ $= 0,4$</p>

<p>Komplementêre gebeurtenisse</p> <ul style="list-style-type: none"> Die Komplementêre reël: $P(\text{nie } A) = P(A') = 1 - P(A)$ 		<p>Voorbeeld:</p> <p>Die gebeurtenisse is A en B onafhanklik. $P(A) = 0,4$ en $P(B) = 0,5$ Bepaal: $P(\text{nie } A)$</p> <p>Oplossing:</p> $P(\text{nie } A) = 1 - P(A)$ $= 1 - 0,4 = 0,6$
<p>Telbeginsel</p> <p>The fundamentele telbeginsel: As daar n maniere is om jou eerste keuse te maak en m maniere om jou tweede keuse te maak, dan is daar altesaam $m \times n$ uitkomstes.</p>	<p>Neem kennis:</p> <ul style="list-style-type: none"> As n items in 'n ry gerangskik kan word, kan dit in $n!$ maniere gedoen word. (geen herhalings) <p>Let op: 5! 5 faktoriaal $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$</p>	<p>Oplossing:</p> <p>Hoeveel verskillende uitrustings kan u aanbring? tesame met 4 hemde, 6 rompe en 2 pare skoene?</p> <p>Oplossing:</p> $\text{Aantal uitrustings} = 4 \times 6 \times 2$ $= 48 \text{ uitrustings}$
<p>Rangskikkings met herhalings:</p> <p>Rangskikkings met herhalings: $\text{aantal rangskikkings} = k^x$</p> <p>Waar: k is die aantal keuses x is die aantal kere wat jy kan kies.</p>	<p>Voorbeeld</p> <p>Hoeveel drie letterkodes kan gemaak word van die letters in die woord SPRING as die letters herhaal kan word?</p>	<p>Oplossing:</p> <p>Aantal maniere</p> $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$
<p>Rangskikkings sonder herhalings:</p> <p>Rangskikkings sonder herhalings: $\text{aantal rangskikkings} = p!$ $= p \times (p - 1) \times (p - 2) \times (p - 3) \dots$</p>	<p>Voorbeeld</p> <p>Hoeveel drie letterkodes kan gemaak word van die letters in die woord SPRING as die letters nie herhaal kan word nie?</p>	<p>Solution:</p> $\text{Number of ways} = 5 \times 4 \times 3$ $= 60$

Afdeling A:

Vraag 1

'n Opname is onder 100 seuns en 60 meisies gedoen om te bepaal hoeveel van hulle TV gekyk het in die tydperk waarin eksamen geskryf is. Hulle terugvoering word in die gedeeltelik voltooide tabel hieronder getoon.

	HET IN EKSAMENTYD TV GEKYK	HET NIE IN EKSAMENTYD TV GEKYK NIE	TOTALE
Manlik	80	a	
Vroulik	48	12	
Totale	b	32	160

- 1.1 Bepaal die waardes van a en b . (2)
- 1.2 Is die gebeurtenisse 'om manlik te wees' en 'het nie in eksamentyd TV gekyk nie', onderling uitsluitend? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)
- 1.3 As 'n leerder wat aan die opname deelgeneem het, ewekansig gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die leerder:
- 1.3.1 TV gekyk het in die tydperk waarin die eksamen geskryf is? (2)
- 1.3.2 Nie manlik is nie en nie TV gekyk het in die tydperk waarin eksamen geskryf is nie? (2)

Vraag 2

'n Toernooi-organiseerder het 'n opname onder 150 lede by 'n plaaslike sportklub gedoen om uit te vind of hulle tennis speel of nie. Die resultate word in die tabel hieronder getoon.

	SPEEL TENNIS	SPEEL NIE TENNIS NIE
Manlik	50	30
Vroulik	20	50

- 2.1 Wat is die waarskynlikheid dat 'n lid wat willekeurig gekies word :
- (a) Vroulik (2)
- (b) Vroulik en tennis speel (1)
- 2.2 Is tennisspeel onafhanklik van geslag? Motiveer jou antwoord met die nodige berekeninge. (3)
- calculations.

Vraag 3

Die waarskynlikheid dat gebeurtenis A en B sal plaasvind, word deur $P(A)$ en $P(B)$ onderskeidelik aangetoon.

Vir enige twee gebeurtenisse A en B, word gegee dat:

- $P(B') = 0,28$
- $P(B) = 3P(A)$
- $P(A \text{ or } B) = 0,96$

Is gebeurtenis A en B onderling uitsluitend? Motiveer jou antwoord. (4)

Vraag 4

Elke passasier op 'n sekere Banana Lugdiens-vlug kies presies een drankie uit tee, koffie of vrugtesap.

Die resultate word in die tabel hieronder aangedui.

	MANLIK	VROULIK	TOTAAL
Tee	20	40	60
Koffie	b	c	80
Vrugtesap	d	e	20
TOTAAL	60	100	a

4.1 Skryf die waarde van a neer.. (1)

4.2 Wat is die waarskynlikheid dat 'n passasier wat willekeurig gekies word, manlike is? (2)

4.3 Gegee dat die geval van 'n passasier wat koffie kies, onafhanklik is van die feit da thy manlike is, bereken die waarde van b . (4)

Vraag 5

Vir twee gebeurtenisse, A en B, word gegee dat:

$$P(A) = 0,2$$

$$P(B) = 0,63$$

$$P(A \text{ en } B) = 0,126$$

Is die gebeurtenisse, A en B, onafhanklik? Motiveer jou antwoord met toepaslike berekeninge. (3)

Vraag 6

Zebra Hoerskool hied slegs twee sportaktiwiteite, naamlik rugby en hokkie, aan.

Die volgende inligting word gegee:

- Daar is 600 leerlinge in die skool.
- 372 leerders speel hokkie.
- 288 leerders speel rugby.
- 56 van die leerders speel GEEN sport nie.
- Die getal leerders wat beide hokkie en rugby speel, is x .

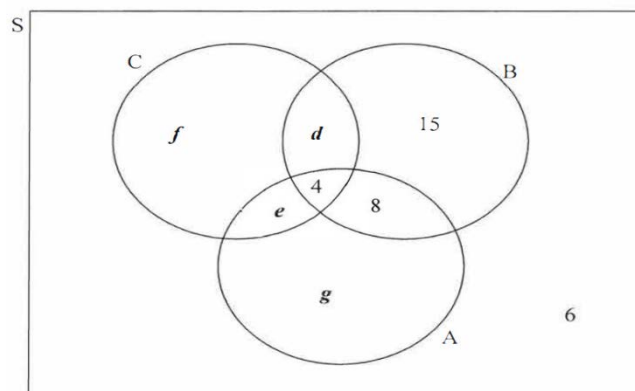
- 6.1 Stel die gegewe inligting in 'n Venn-diagram, in terme van x , voor. (3)
- 6.2 Bereken die waarde van x . (2)
- 6.3 Is die gebeurtenisse, speel rugby en speel hokkie, onderling uitsluitend? Motiveer jou antwo (2)

Vraag 7

Navorsing is gedoen oor bestuur onder die invloed van alkohol. Inligting wat by die verkeersowerhede van 54 lande gekry is oor die metodes wat gebruik word om die alkoholvlak van 'n persoon te toets, is hieronder opgesom:

- 4 lande gebruik al drie metodes (A, B en C).
- 12 lande gebruik die alkoholinhoud van asem (A) en bloed-alkoholkonsentrasie (B).
- 9 lande gebruik bloed-alkoholkonsentrasie (B) en sertifikaat uitgereik deur dokters (C).
- 8 lande gebruik die alkoholinhoud van asem (A) en sertifikaat uitgereik deur dokters (C).
- 21 lande gebruik die alkoholinhoud van asem (A).
- 32 lande gebruik bloed-alkoholkonsentrasie (B).
- 20 lande gebruik sertifikaat uitgereik deur dokters (C).
- 6 lande gebruik geeneen van hierdie metodes nie.

Hieronder is 'n gedeeltelik voltooië Venn-diagram wat die inligting hierbo voorstel.



- 7.1 Gebruik die gegewe inligting en die Venn-diagram om die waardes van d , e , f en g te bepaal. (4)
- 7.2 Vir 'n land wat ewekansig gekies is, bereken:
- (a) $P(A \text{ en } B \text{ en } C)$ (1)
- (b) $P(A \text{ of } B \text{ of } C)$ (1)

- (c) $P(\text{slegs C})$ (1)
- (d) $P(\text{dat 'n land presies twee metodes gebruik})$ (1)

Vraag 8

Gebeurtenisse A en B is onderling uitsluitend. Die word gegee dat:

- $P(B) = 2P(A)$
- $P(A \text{ or } B) = 0,57$

Bereken $P(B)$. (3)

Vraag 9

Twee identiese sakke word met balle gevul. Sak A bevat 3 pienk en 2 geel balle. Sak B bevat 5 piek en 1 geel balle. Dit is ewe waarskynlik dat Sak A of Sak B gekies word. Elke bal het 'n gelyke kans om uit die sak gekies te word. 'n Sak word willekeurig gekies en dan word 'n bal willekeurig uit die sak gekies.

- 9.1 Stel die inligting deur middel van 'n boomdiagram voor. Dui duidelik die waarskynlikheid aan vir elke tak van die boomdiagram verteenwoordig word en skryf al die uitkomst neer. (4)
- 9.2 Wat is die waarskynlikheid dat 'n geel bal uit Sak A gekies sal word? (1)
- 9.3 Wat is die waarskynlikheid dat 'n pienk bal gekies sal word? (3)

Vraag 10

Veli en Bongi is leerders by dieselfde skool. Hulle kom party dae laat by die skool aan. Die waarskynlikheid dat nóg Veli nóg Bongi op 'n spesifieke dag laat sal kom, is 0,7.

- 10.1 Bereken die waarskynlikheid dat ten minste een van die twee leerders op 'n dag wat willekeurig gekies is, laat by die skool sal aankom. (1)
- 10.2 Die waarskynlikheid dat Veli op 'n dag wat willekeurig gekies is, laat by die skool sal aankom is 0,5, terwyl die waarskynlikheid dat hulle albei op daardie dag laat sal wees, 0,15 is. Bereken die waarskynlikheid dat Bongi op daardie dag laat by die skool sal aankom. (3)
- 10.3 Die skoolhoof vermoed dat daar 'n verband tussen die twee leerders se laatkommery is. Die skoolhoof vra jou om te bepaal of die gebeure van Veli wat laat by die skool kom en Bongi wat laat by die skool kom, statisties onafhanklik is, of nie. Wat sal jou antwoord aan hom wees? Toon ALL jou berekeninge. (3)

Afdeling B:

Vraag 1

Vyf seuns en vier meisies gaan fliiek. Hulle sit almal langs mekaar in dieselfde ry.

- 1.1 Een seun en meisie is 'n paartjie en wil langs mekaar op enige punt van die ry vriende sit. Op hoeveel verskillende maniere kan die hele groep sit? (3)
- 1.2 Indien al die vriende willekeurig langs mekaar sit, bereken die waarskynlikheid dat al die meisies langs mekaar sal sit. (3)

Vraag 2

Die letters van die woord DECIMAL word willekeurig gerangskik om 'n nuwe 'woord', wat ook uit sewe letters bestaan, te vorm. Hoeveel verskillende rangskikkings is moontlik as:

- 2.1 Letters herhaal mag word (2)
- 2.2 Letters mag nie herhaal word nie (2)
- 2.3 Die rangskikkings met 'n klinker moet begin en met 'n consonant moet eindig en geen herhaling van letters toegelaat word. (4)

Vraag 3

Tulani Hoer, het 'n prysuitdelingseremonie vir sport. Tulani Hoer het

'n basketbalspan wat uit 5 spelers bestaan en 'n vlugbalspan wat uit 6 spelers bestaan.

- 3.1 Al die basketbalspelers sit in een ry by die seremonie. Daar is geen beperking op wie in watter posisie sit nie. Op hoeveel verskillende maniere kan hulle sit? (1)
- 3.2 Daar is besluit dat die kaptein op die eerste sitplek van die ry moet sit. Die twee onderkapteine moet langs mekaar op enige van die oorblywende sitplekke sit. Op hoeveel verskillende maniere kan die basketbalspelers nou sit? (3)
- 3.3 Die basketbalspan en die vlugbalspan sit na die pouse by die seremonie in dieselfde ry. Bereken die waarskynlikheid dat die basketbalspelers sal saamsit en dat die vlugbalspelers sal saamsit. Neem aan dat sitplekposisies willekeurig toegeken word. Gee jou antwoord in vereenvoudigde breukvorm. (3)

Vraag 4

Die syfers 1 tot 7 word gebruik om 'n viersyferkode te skep om toegang tot 'n geslote vertrek te verkry. Hoeveel verskillende kodes is moontlik as die syfers nie herhaal mag word nie en die kode

'n ewe getal groter as 5 000 moet wees? (5)

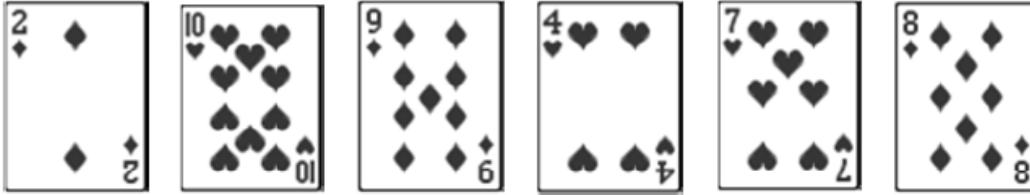
Vraag 5

Beskou die woord M A T H S.

- 5.1 Hoeveel verskillende 5-letter-rangskikkings kan gevorm word as al die letters hierbo gebruik word? (2)
- 5.2 Bepaal die waarskynlikheid dat letter S en T altyd die eerste twee letters van die rangskikkings in VRAAG 5.1 sal wees. (3)

Vraag 6

Die kaarte hieronder word van links na regs in 'n ry geplaas.



- 6.1 Op hoeveel verskillende maniere kan hierdie 6 kaarte willekeurig in 'n ry geplaas word? (2)
- 6.2 Op hoeveel verskillende maniere kan hierdie kaarte in 'n ry geplaas word indien die diamante en harte afwisselend geplaas word? (3)
- 6.3 Indien hierdie kaarte willekeurig in 'n ry geplaas word, bereken die waarskynlikheid dat AL die harte langs mekaar sal wees. (3)

Vraag 7

Cindy het die volgende boeke op 'n boekrak:

- 4 Wiskunde boeke
- 3 Fisiese Wetenskap boeke
- 2 Lewens Wetenskap boeke

- 7.1 Bepaal die aantal verskillende maniere waarop al die boeke gerangskik kan word.
Determine the number of different ways that all the books can be arranged. (2)
- 7.2 Determine the number of different ways that the books can be arranged in order that the books in each learning area are next to each other. (3)
- 7.3 In how many different ways can all the books be arranged in order of descending height? (2)

Vraag 8

Beskou die letters van die woord: NUMERATOR.

- 8.1 Hoeveel 9-letter woordrangskikkings kan gevorm word, indien herhaling van letters toegelaat word? (1)
- 8.2 Hoeveel 9-letter woordrangskikkings kan gevorm word, as al 4 vokale nooit saam is nie en herhaling van letters nie toegelaat word nie? (3)
- 8.3 'n 8-letter woordrangskikking word van die woord NUMERATOR gevorm. Al die vokale moet in hierdie woordrangskikking gebruik word en herhaling van letters word nie toegelaat nie. Wat is die waarskynlikheid dat alle onewe plekke deur vokale gevul word? (4)

Statistiek

Opsomming: Alle inhoud vanaf gr 10 – 12 word in die finale gr 12 eksamen geassesseer

1. Opsomming van tipes data:

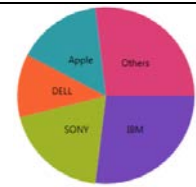
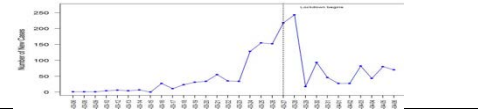
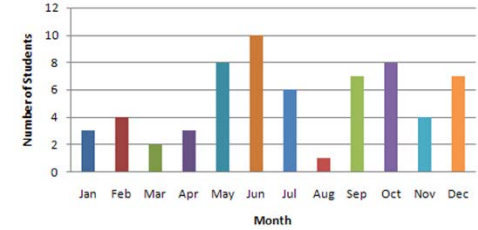
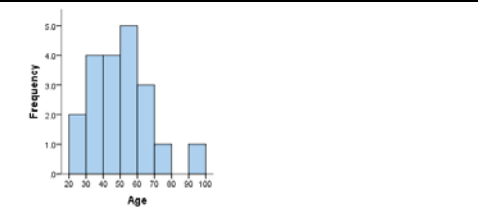
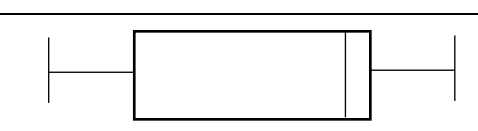
Die table hieronder toon die verskil tussen **ongegroepeerde** and **gegroepeerde data**

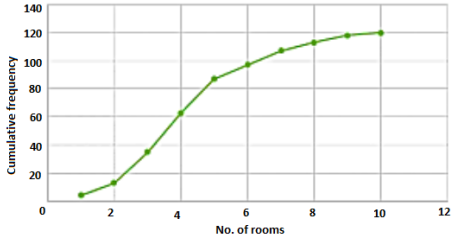
Ongegroepeerde Data	Gegroepeerde Data
Data waardes wat spesifiek is Byvoorbeeld: Wiskunde toets punte	Data wat in klasintervalle gegropeer word; spesifieke waardes onbekend Example: tyd bestee aan die bestudering van wiskunde en die ooreenstemmende wiskunde toets punt.
Data word geanaliseer deur: <ul style="list-style-type: none"> Bepaal die maatstawwe van sentrale neiging- gemiddeldelde, modus, mediaan. Bepaal die meting van verspreidingsdiagram, interkwartielomvang, variansie en standaardafwyking Skets verskillende grafieke. 	Data word geanaliseer deur: <ul style="list-style-type: none"> Identifiseer afhanklike en onafhanklike veranderlikes. Bepaal of daar 'n verwantskap of korrelasie bestaan tussen die twee veranderlikes. Bepaal die sterkte van die verwantskap of korrelasie.
Interpreteer vrae soos: Hoeveel leerders 'n slaag persentasie behaal het?	Interpreteer vrae soos: Beskryf die verwantskap/ korrelasie tussen die tyd bestee om te leer en die toets punt.

Diskrete data: Presiese waardes wat telgetalle is, byvoorbeeld die aantal mense wat van COVID-19 herstel het.

Deurlopende data: Dit kan enige plek binne 'n reeks reële getalwaardes wees; bv. hoogte, massa en tyd.

2. Opsomming van verskillende grafieke

Tipe	Voorbeeld	Verduidelikende notas
Sirkeldiagram Proporsionele verhoudings by 'n spesifieke punt in tyd		Om data na grade te verander $\frac{\text{frekwensie}}{\text{totale uitkomst}} = 360^\circ$
Lyndiagram Neigings/ veranderinge oor tyd.		Meervoudige neigings kan vergelyk word
Kolomdiagram Vergelyking van diskrete nie-numeriese data. Die hoogte van elke kolom verteenwoordig die frekwensie.		Kan nie gebruik word om konitnue (aaneenlopende) data te illustreer nie. Kolomdiagramme word verdeel deur 'n duidelike gapings tussen die kolomme.
Histogram Neigins in numeriese en konitnue/aaneenlopende data. Die are van die kolom verteenwoordig die frekwensie.		Gebruik slegs vir konitnue data met geen data tussen-in die kolomme nie. Die kolomme kan van verskillende wydte wees, in verhouding met die interval se grootte.
Mond-en-Snor diagram Geskep deur die gebruik van vyf gatal opsomming.		Skaal wat gebruik word moet akkuraat wees om akkurate vyf-punt opsomming en minimum

<p>Illustreer die verspreiding van data. Kan gebruik word om te illustreer en bespreek die posisie van die mediaan</p>		<p>waarde, Q_1, Q_2, Q_3 en maksimum waarde te bepaal.</p>
<p>Blaar-en-Stingel Gebruik om gegroepeerde data op te som en terselfdertyd 'n skets van die data te gee</p>	<p style="text-align: center;">Stem and Leaf Plot</p> <pre> 4 1 5 2 7 8 6 5 6 7 0 5 8 8 8 8 0 0 9 5 </pre>	<p>Die stingels is die getalle in die Linker kantse kolom en die blare is die syfers in die Regterkantse kolom.</p>
<p>Kummulatiewe frekwensiekurve / Ogief Dit is 'n grafiek wat die inligting in kummulatiewe frekwensie vertoon. 'n Ogief kan getrek word van ongegroepeerde en gegroepeerde diskrete data of gegroepeerde konitnue data.</p>		<p>Die totale tellings word kummulatiewe grekwensie genoem. Dit word bereken deur die frekwensies bymekaar te tel van alle voringe tellings. 'n Afgeronde griefiek van kummulatiewe frekwensies word verkry.</p>

3. Belangrike simbole gebruik in Statistiek:

Σ	Die Griekse letter <i>sigma</i> , wat beteken <i>som van</i> gebruik om aan te dui dat die waardes bymekaar getel moet word.
n	Die getal tellings (data items) in 'n datastel
\bar{x}	Die gemiddelde van al die tellings in die datastel.
σ	Die standaard-afwyking.

4. Meting van Data

Sentrale tendens:

Die metings van sentrale tendens is die drie verskillende gemiddeldes, dit is die gemiddelde, mediaan en modus.

Dispersie/verspreiding:

Die meting van verspreiding is die variasiewyde, interkwartiel-reeks, semi-Interkwartiel-reeks, variasie en standaard-afwyking wat gebruik word om die verspreiding van die variatiteit van data te meet.

	Hoe om te bepaal:	Relevante Formule
Gemiddelde	$\text{gemiddelde} = \frac{\text{som van die tellings}}{\text{aantal tellings}}$	<p>Ongegroepeerde data:</p> $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} \text{ or } \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$ <p>Gegroepeerde data</p> $\bar{x} = \frac{\Sigma(f \times \text{interval middelpunt})}{n}$
Mediaan: Middelmeeste tellings	<p>Ranskik die tellings in toenemende orde, indien die aantal van die tellings die volgende is: Ongelyk dan is die mediaan die telling presies in die middel. Gelyk, tel die twee middelste tellings bymekaar en deel die resultaat deur twee</p>	<p>mediaan $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ Genruik hierdie formule vir groot monsters. Vir gegroepeerde data kan die mediaan geskat word, deur die Ogief.</p>
Modus	Die telling wat die meeste voorkom. Meer as een modus kan bestaan. Vir gegroepeerde data word die modale interval gekies	

Persentiel	‘n Persentiel is ‘n meting watter % van die totale frekwensie bereik, or laer as die meting. Dit verdeel data op in 100 gelyke dele.	Om die posisie van die k^{ste} persentiel wat ‘n spesifieke persentiel is: $P_k = \frac{k(n + 1)}{100}$
Kwartiel	Verdeel die data op in 4 gelyke dele. Die 1 ^{ste} kwartiel is die 25 ^{ste} persentiel Die 2 ^{de} kwartiel is die 50 ^{ste} persentiel Die 3 ^{de} kwartiel is die 75 ^{ste} persentiel.	Vir groot monsters $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ de telling $Q_2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ de telling $Q_3 = \left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ de telling
Variasiewydte/Omvang	Die verskil tussen die hoogste en die laagste tellings in ‘n gegewe datastel.	Reeks is gelyk aan hoogste telling – laagste telling
Interkwartiel-wydte (IKW)	Die verskil tussen die boonste kwartiel en die laer kwartiel in ‘n gegewe stel	$IQR = Q_3 - Q_1$
Semi – Interkwartiel-wydte	Helfte die verskil tussen die boonste en die laer kwartiel in enige gegewe stel	Semi-IQR $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

5. **Variansie en Standaard-afwyking:** Twee metings van verspreiding, wat **alle** data in ag neem, wat gekoppel is aan die gemiddelde.

Die **Variansie** is the gemiddelde van die som van die vierkante van die afwykings van die gemiddelde.

Ons vind die variansie deur:

- Vind die gemiddelde: $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$
- Vind die afwyking van die gemiddelde van elke item van die datastel:
 - **Afwyking** = data item (x) – gemiddelde (\bar{x}) ($x - \bar{x}$)
- Kwadreeer elke afwyking: **(afwyking)²** = $(x - \bar{x})^2$
- Vind die som van die kwadrate van die afwyking:
 - **$\Sigma(\text{afwyking})^2 = \Sigma(x - \bar{x})^2$**
- Vind die gemiddelde van die kwadrate van die afwykings, deur die die aantal terme in die datastel in te deel:

$$\text{○ Variansie} = \frac{\Sigma(\text{afwyking})^2}{\text{aantal data items}} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}$$

The **Standaard Afwyking** is die vierkantswortel van die variansie:

$$\sqrt{\frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n}}$$

- Wanneer die data elemente nou saamgevoeg is, is die standaard afwyking en variansie klein, wanneer die elemente wydverspreid is, sal die variansie relatief groot wees.
- ‘n Datastel met meer items naby aan die gemiddelde sal ‘n kleiner verspreiding hê en ‘n kleiner standaardafwyking.
- ‘n Datastel met meer data-items verder van die gemiddelde sal ‘n groter verspreiding en groter standaardafwyking hê

Voorbeeld 1

a) Bereken die variansie en die standaard-afwyking van die volgende twee stele data verteenwoordigend van die aantal lopies wat deur twee krieketspelers aangeteken is, oor 10 wedstryde.

kolwer A	40	45	51	52	62
Kolwer B	15	28	44	78	85

b) Gebruik die twee standaardafwykings om die verspreiding van data in twee stelle te vergelyk.

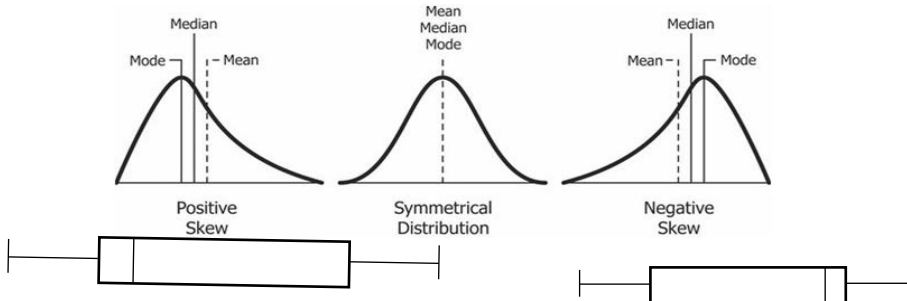
Oplossing:

kolwer A	kolwer B
Variansie = 54.8	Variansie = 750.8
Standaard-afwyking \approx 7.	Standaard-afwyking \approx 27.4
Die groter standaardafwyking van Kolwer B is ‘n aanduiding dat die data items oor die algemeen veel verder van die gemiddelde as die data items van Kolwer A is.	

Dit impliseer dat die data items van **Kolwer B** meer verspreid is as die data items van **Kolwer A** .
 In terme van die verskil in die standaard-afwykings is dit meer waarskynlik dat **Kolwer A** se syfers meer voorspelbaar is.

9. Die verspreiding/distribusie van Data

Die distribusie is the karakter en vorm van die verspreiding van data. Dit kan of simmetries of skeef wees.



Sleutel-kenmerke van skewe data:

Skeefheid is die tendens vir die waardes om meer frekwent (voor te kom) om die hoë of lae end van die x - as.

- Met die positief-skewe distribusie, is die stert op die regterhand langer as die linkerhandse kant. (mediaan $<$ gemiddelde)
- Meeste van die waardes neig om aan die linkerkant te groepeer van die x -as (dit is die kleiner waardes) met 'n toenemend minder waardes op die regterkant (dit is die groter waardes)
- Met 'n negatief-skewe distribusie, is die stert op die linkerkant langer as die regterkant. (mediaan $>$ gemiddelde)
 Meeste van die waardes neig op te groepeer aan die regterhand van die x -as (dit is die groter waardes) met toenemend minder waardes op die linkerkant van die x -as (dit is die kleiner waardes).

10. Uitskieters

- Die uitskieters is data-inskrywings wat vêr verwyder is van die ander data-inskrywings in 'n datastel wat veel kleiner of groter is as die res van die datawaardes
- 'n Uitskieter het 'n invloed op die gemiddelde en die omvang van die datastel, maar het geen invloed op die gemiddelde van die laer en boonste kwartiele nie.
- Enige data-item wat minder is as $Q_1 - 1,5 \times IQR$ or meer as $Q_3 + 1,5 \times IQR$ is 'n uitskieter.

Voorbeeld: Is enige inskrywing in die datastel uitskieters?

1, 8, 12, 14, 14, 15, 17, 17, 19, 26, 32

Vind eerste die IQR

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

$$19 - 12 = 7$$

$$\text{Laer kwartiel } (Q_1) < Q_1 - 1,5 \times IQR$$

$$< 12 - 1,5 \times 7$$

$$< 1,5$$

1 is 'n uitskieter

$$\text{Boonste kwartiel } (Q_3) > Q_3 + 1,5 \times IQR$$

$$> 19 + 1,5 \times 7$$

$$> 29,5$$

32 is ook 'n uitskieter

11. Spreidiagram en tipe korrelasie

'n Spreidiagram is 'n grafiek wat die x - en y -asse gebruik om tweeveranderlike data voor te stel.

- Dit het twee asse, een vir elke veranderlike.
- 'n punt word gestip vir elke paar koördinate en kyk na die algehele patroon en tendens in die data.
- Die x - koördinate is die onafhanklike veranderlike.
- Die y - koördinate is die afhanklike veranderlike.

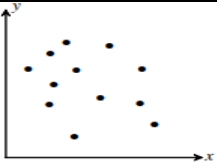
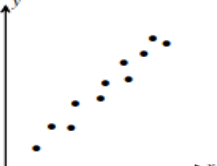
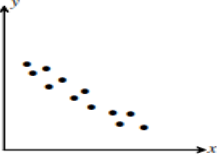
a) Tipe korrelasie

Gedurende die analyse van 'n spreidiagram kyk ons na hoe die punte lê. Sekere patrone wys dat daar korrelasies, (verwantskap) bestaan tussen twee veranderlikes.

Wanneer die korrelasie beskryf word tussen twee veranderlikes op 'n spreidiagram, moet ons verwys na:

- **Die vorm-** is dit lineêre, kwardraties of eksponensieël.
- **Die rigting-** is dit positief of negatief.
- **Die sterkte** –is dit sterk, medium of swak.

Die table toon die verskillende tipe korrelasie:

<p>Geen korrelasie</p> <p>Die punte is lukraak versprei regoor die grafiek, dit dui aan dat daar geen patroon is tussen die twee stelle data.</p>	
<p>Sterk positiewe lineêre korrelasie</p> <p>Die punte toon 'n band met 'n opwaartse helling van links onder tot regs bo. As een veranderlike toeneem, neem die ander veranderlike ook toe.</p>	
<p>Sterk negatiewe lineêre korrelasie</p> <p>Die punte toon 'n band met 'n afwaartse helling van links bo tot regs onder. As een veranderlike toeneem, neem die ander veranderlike af.</p>	

b) Korrelasie koëffisiënt (r)

Dit meet die sterkte van die korrelasie (verantskap) tussen twee veranderlikes.

Die omvang van die korrelasie koëffisiënt is tussen -1 en 1

- As x en y 'n sterk positiewe korrelasie het, dan is r nader aan 1
- As x en y 'n sterk negatiewe korrelasie het, dan is r nader aan -1
- As daar geen lineêre korrelasie of 'n baie swak lineêre korrelasie, dan is r nader aan 0

12. Die lyn van beste passing en lineêre regressielyn

Die sterkte van die lineêre verwantskap tussen die twee veranderlikes in 'n spreidingsdiagram hang af van hoe naby die data punte aan die lyn van beste passing is.

Hoe nader die punte aan die lyn is, hoe sterker is die verwantskap.

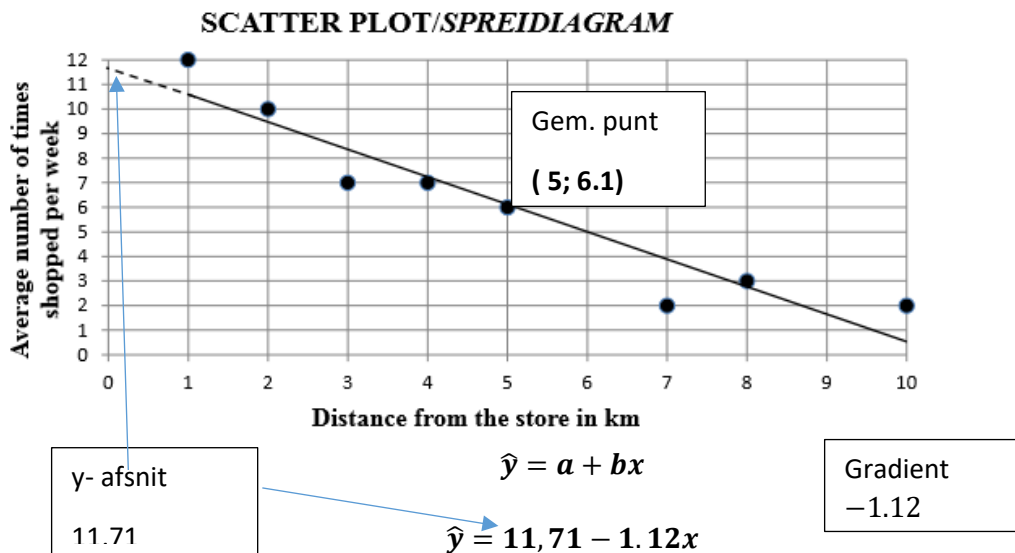
Ons gebruik 'n wetenskaplike sakrekenaar om die vergelyking van hierdie lyn te bepaal.

Ons ken die vergelyking van 'n reguitlyn: $y = mx + c$

In Statistiek word die formule $y = a + bx$ gebruik, waar b die gradiënt is en a die afsnit op die y-as van die reguitlyn van beste passing.

Die gradiënt is dus b in plaas van m en die y-afsnit is a in plaas van c .

Die lyn van beste passing gaan deur gemiddelde punt $(\bar{x}; \bar{y})$ **(5; 6.1)**



Die minste vierkante regressielyne kan gebruik word om voorspellings te maak:

Wanneer 'n waarde vir een van die veranderlikes wat oorspronklik nie in die data was nie, gevind word, kan jy 'n voorspelling maak.

- Die vereiste waarde kan vanaf die spreidiagram afgelees word of deur die vergelyking van die regressie te gebruik.
- Voorspellings kan gemaak word deur die proses van interpolasie en ekstrapolasie
- **Interpolasie**- nuwe data item binne die omvang van die data.
- **Ekstrapolasie**- geraamde nuwe datawaardes bo 'n stel bekende data.

Afdeling A

VRAAG 1

DBE-Mei /Junie 2019 (Vraag 1)

Elke kind in 'n groep vierjarige kinders het dieselfde legkaart gekry om te voltooi. Die tyd (in minute) wat dit elke kind geneem het om die legkaart te voltooi, word in die table hieronder getoon.

TIME TAKEN (t) (IN MINUTES)	NUMBER OF CHILDREN
$2 < t \leq 6$	2
$6 < t \leq 10$	10
$10 < t \leq 14$	9
$14 < t \leq 18$	7
$18 < t \leq 22$	8
$22 < t \leq 26$	7
$26 < t < 30$	2

- 1.1 Hoeveel kinders het die legkaart voltooi? (1)
- 1.2 Bereken die geskatte gemiddelde tyd wat dit geneem het om die legkaart te voltooi. (2)
- 1.3 Voltooi die kumulatiewefrekwensie-kolom in die table (2)
- 1.4 Skets 'n kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) om die data voor te stel. (3)
- 1.5 Gebruik die grafiek om die mediaantyd wat dit geneem het om die legkaart te voltooi, te bepaal (2)

[10]

VRAAG 2

DBE-Mei /Junie 2019 (Vraag 2)

Leerders wat 'n punt van minder as 50% in 'n Wiskundetoets behaal het, is gekies om 'n rekenaargebaseerde program as deel van 'n ingrypingstrategie te gebruik. 'n Tweede toets is na afloop van die program geskryf om die doeltreffendheid van die ingrypingstrategie te bepaal. Die punt (as 'n persentasie) wat 15 van hierdie leerders in beide toetse behaal het, word in die tabel hieronder gegee.

LEERDER	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12	L13	L14	L15
TOETS 1 (%)	10	18	23	24	27	34	34	36	37	39	40	44	45	48	49
TOETS 2 (%)	33	21	32	20	58	43	49	48	41	55	50	45	62	68	60

- 2.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn (3)
- 2.2 'n Leerder het 15 uit 'n totaal van 50 punte vir die eerste toets behaal.
 - 2.2.1 Skryf die leerder se punt vir hierdie toets as 'n persentasie neer (1)
 - 2.2.2 Voorspel die leerder se punt vir die tweede toets. Gee jou antwoord tot die naaste heelgetal. (2)
- 2.3 Vir die 15 leerders hierbo is die gemiddelde punt van die tweede toets 45,67% en die standaardafwyking is 13,88%. Die onderwyser besef dat hy vergeet het om die punte van die laaste vraag by die totale punt van elkeen van hierdie leerders te tel. Al die leerders het volpunte vir die laaste vraag behaal. Nadat die punte van die laaste vraag bygetel is, is die nuwe gemiddelde punt 50,67%.
 - 2.3.1 Wat is die standaardafwyking nadat die punte vir die laaste vraag by elke leerder se totaal getel is? (2)

2.3.2 Wat is die totale punt van die laaste vraag?

(2)

QUESTION 3**DBE Nov 2019 (Question 1)**

Die tabel hieronder toon die maandelikse inkomste (in rand) van 6 verskillende persone en die bedrag (in rand) wat elke person maandeliks aan 'n motorpaaieiment spandeer.

Maandelikse inkomste(in rand)	9 000	13 500	15 000	16 500	17 000	20 000
Maandelikse paaieiment (in rands)	2 000	3 000	3 500	5 200	5 500	6 000

3.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate- regressielyn vir die data. (3)

3.2 Indien 'n person R14 000 per maand verdien, voorspel die maandelikse paaieiment wat hierdie person aan 'n motorvoertuig kan spandeer. (2)

3.3 Bepaal die korrelasiekoëffisiënt tussen die maandelikse inkomste en maandelikse paaieiment van 'n motorvoertuig (1)

3.4 'n persoon wat R18 000 per maand verdien, moet besluit of 'n maandelikse paaieiment van R 9000 aan 'n motorvoertuig spandeer kan word, al dan nie. Indien die inligting hierbo 'n ware weerspieëling van die bevolkingsdata is, op watter van die volgende sal die persoon heel moontlik besluit:

- A Spandeer R9 000 per maand aangesien daar 'n baie sterk positiewe korrelasie tussen die bedrag verdien en die maandelikse paaieiment is.
- B Spandeer NIE R9 000 per maand NIE aangesien daar 'n baie swak positiewe korrelasie tussen die bedrag verdien en die maandelikse paaieiment is.
- C Spandeer R9 000 per maand, want die punt (18 000 ; 9 000) lê baie naby aan die kleinstekwadrate-regressielyn.
- D Spandeer NIE R9 000 per maand NIE, want die punt (18 000 ; 9 000) lê baie ver van die kleinstekwadrate-regressielyn. af. (2)

VRAAG 4**DBE Nov 2019 (Vraag 2)**

'n Opname is onder 100 mense gedoen oor die bedrag wat hulle maandelik vir hulle selfoonkontrakte betaal het. Die persoon wat die opname gedoen het, het bereken dat die geskatte gemiddelde betaling R309 per maand is. Ongelukkig het hy na die opname van die data veloor. Die frekwensietabel hieronder toon die gedeeltelike resultate van die ondersoek.

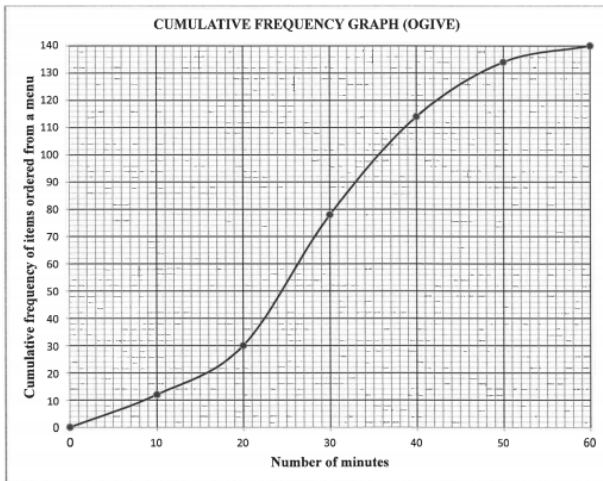
BEDRAG BETAAL (IN RAND)	FREKWENSIE
$0 < x \leq 100$	7
$100 < x \leq 200$	12
$200 < x \leq 300$	<i>a</i>
$300 < x \leq 400$	35
$400 < x \leq 500$	<i>b</i>
$500 < x \leq 600$	6

- 4.1 Hoeveel mense het R200 of minder vir hulle maandelikse selfoonkontrakte betaal? (1)
- 4.2 Gebruik die inligting hierbo om te toon dat $a = 24$ en $b = 16$ (5)
- 4.3 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 4.4 Teken 'n ogief om die data voor te stel. (4)
- 4.5 Bepaal hoeveel mense meer as R420 per maand vir hulle selfoonkontrakte betaal het. (2)

[13]

Question 5**DBE Nov 2018 (Question 1)**

Die kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) hieronder toon die totale aantal geregte wat oor 'n tydperk van 1 uur vanaf 'n spyskaart bestel is.



- 5.1.1 Skryf die aantal voedselitems neer wat gedurende hierdie uur vanaf die spyskaart bestel is. (1)
- 5.1.2 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 5.1.3 Hoe lank het dit geneem om die eerste 30 voedselitems te bestel? (1)
- 5.1.4 Bepaal die 75^{ste} persentiel van die data (2)
- 5.1.5 Determine the 75th percentile for the data. (2)
- 5.1.6 Bereken die interkwartielvariasiewydte (-omvang) van die data (2)
- [9]**

VRAAG 6**DBE Nov 2018 (vraag 2)**

- 6.1 Reggie werk deelyds as 'n kelner by 'n plaaslike restaurant. Die bedrag geld (in rand) wat hy oor 'n tydperk van 15 dae met footjies ('tips') gemaak het, word hieronder gegee.

35	70	75	80	80
90	100	100	105	105
110	1110	115	120	125

- 6.2.1 Bereken:
- a) Die gemiddeld van die data (2)
- b) Die standaardafwyking van die data. (2)
- 6.2.2. Mary werk ook deelyds as 'n kelner by dieselfde restaurant. Oor dieselfde 15 dag-tydperk het Mary dieselfde gemiddelde bedrag met footjies as Reggie ingesamel, maar haar standaardafwyking was R14.
- Gebruik die beskikbare inligting en lewer kommentaar op die:
- a) Totale bedrag in footjies wat ELKEEN van hulle oor die 15 dag-tydperk ingesamel het. (1)
- b) Verspreiding wat ELKEEN van hulle met daaglikse footjies oor hierdie tydperk ontvang het. (1)

[6]

VRAAG 7**DBE Mei/Junie 2018(Vraag 1)**

Die maandelikse wins (in duisende rand) wat 'n maatskappy in 'n jaar maak, word in die table hieronder aangetoon.

110	112	156	164	167	169
171	176	192	228	278	360

7.1 Bereken die:

7.1.1 Gemiddelde wins. (3)

7.1.2 Mediaanwins vir die jaar. (1)

7.2 Teken 'n mond-en-snordigram (boksplot) om die data voor te stel (2)

7.3 Bepaal vervolgens die interkwartielvariasiewydte van die data. (1)

7.4 Lewer kommentaar op die skeefheid van die verspreiding van die data (1)

7.5 Vir die gegewe data:

7.5.1 Bereken die stadaardafwyking (1)

7.5.2 Bepaal die aantal maande waarin die wins minder as een standaarafwyking onder die gemiddelde was (2)

[11]

VRAAG 8**DBE May/June 2018 (Vraag 2)**

Daar word beweer dat die aantal keer wat 'n kriek in 'n minuut tjirp 'n goeie aanduiding is van die lugtemperatuur (in °C). Die table hieronder toon in die inligting wat gedurende 'n navorsingstudie aangeteken is.

8.1 Stel die data hierbo op 'n spreigrafiek voor. (3)

8.2 Verduidelik waarom die woorde, " 'n goeie aanduiding is", WAAR is. (1)

8.3 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn van die data. (3)

8.4 Voorspel die lugtemperatuur (in °C) as 'n kriek 80 keer 'n minuut tjirp (2)

Tjips per minuut	Lugtemperatuur in °C
32	8
40	10
52	12
76	15
92	17
112	20
128	25
180	28
184	30
200	35

[9]

VRAAG 9**DBE Feb/March 2018 (Vraag 1)**

'n organisasie het besluit om bloedskenkklinieke by verkeie kollegas op te stel. Studente sou oor 'n tydperk van 10 dae bloed skenk. Die getal eenhede bloed wat per dag deur studente van kollege X geskenk is, word in die tabel hieronder getoon.

Dae	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Eenhede bloed	45	59	65	73	79	82	91	99	101	106

9.1 Bereken:

9.1.1 Die gemiddelde van die eenhede bloed wat per dag oor die tydperk van 10 dae geskenk is (2)

9.1.2 Die stadaardafwyking van die data. (2)

9.1.3 Hoeveel dae is die getal eenhede bloed wat by kollege X geskenk is, buite een stadaardafwyking van die gemiddelde? (3)

9.2 Die aantal eenhede bloed wat deur die studente van kollege X gekenk is, word in die mond-en-snordiagram hieronder voorgestel.



9.2.1 Beskryf die skeefheid van die data. (1)

9.2.2 Skryf die waardes van A en B, die onderste kwartiel en die booste kwartiel onderskeidelik, van die datastel neer. (2)

9.3 Daar is vasgestel dat die getal eenhede bloed wat elke dag deur kollege X geskenk is, verkeerd getel is. Die korrekte gemiddelde van die data is 95 eenhede bloed. Hoeveel eenhede bloed is NIE oor die 10 dae getel NIE? (1)

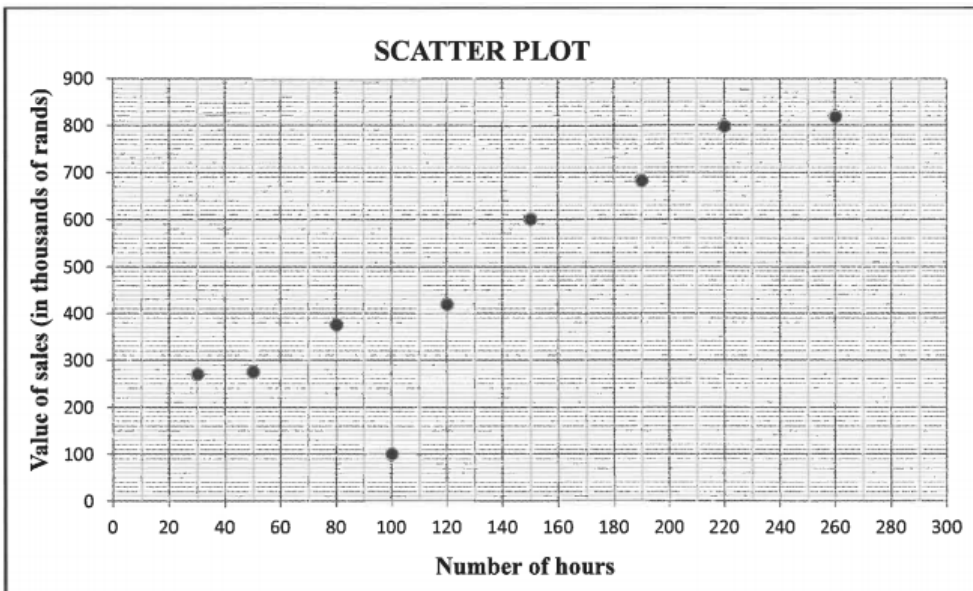
[11]

VRAAG 10

DBE Feb/March 2018 (Vraag 2)

Die table hieronder toon die getal ure wat 'n verkoopsverteenwoordiger van 'n maatskappy saam met elkeen van sy nege kliente in een jare bestee het en die waarde van die verkope (in duisende rand) vir daardie klient.

Getal ure	30	50	80	100	120	150	190	220	260
Waarde van verkope (In duisende rand)	270	275	376	100	420	602	684	800	820



10.1 Identifiseer 'n uitskieter in die data hierbo. (1)

10.2 Bereken die vergelyking van die kleinste-kwadrade-regressielyn van die data. (3)

10.3 Die verkoopsverteenwoordiger het vergeet om die verkope van een van sy kliente aan te teken. Voorspel die waarde van hierdie klient se verkope (in duisende rand) as hy gedurende die jaar 240 uur saam met hom bestee het? (2)

10.4 Wat is die verwagte toename in verkope vir ELKE eksta uur wat met 'n klient bestee is? (2)

[8]

Trigonometrie

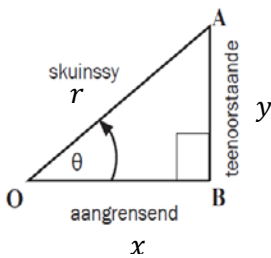
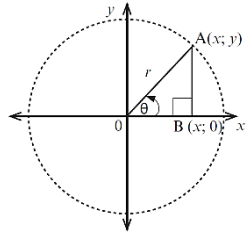
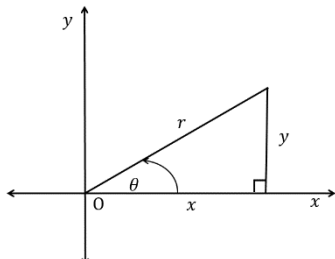
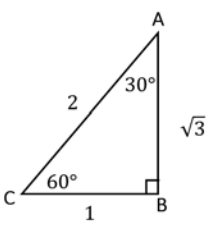
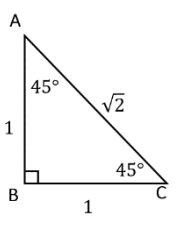
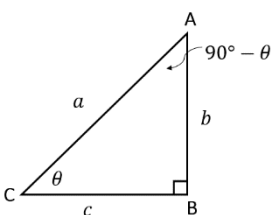
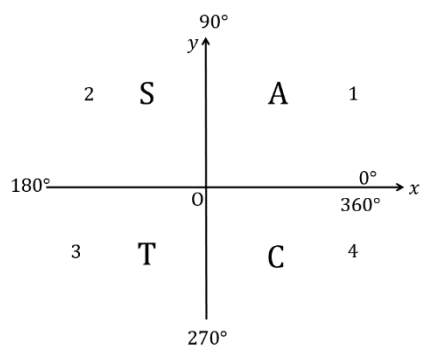
Opsomming

1. KABV- AANWYSINGSVORDERING VANAF GRAAD 10-12

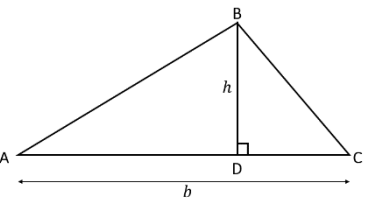
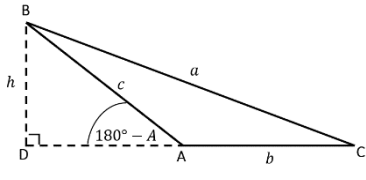
Graad 10-KABV	Graad 11-KABV
<p>1. Definieer die trigonometriese verhoudings $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$, deur van reghoekige driehoeke gebruik te maak.</p> <p>2. Brei die definisies van $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$ uit vir $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.</p> <p>3. Definieer die resiproke van die trigonometriese verhoudings as $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ en $\cot\theta$, deur van reghoekige driehoeke gebruik te maak (hierdie drie resiproke moet slegs in graad 10 ondersoek word).</p> <p>4. Lei die waardes van die trigonometriese verhoudings vir die spesiale gevalle af (sonder die gebruik van 'n sakrekenaar) $\theta \in \{0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$</p> <p>5. Los tweedimensionele probleme, waar reghoekige driehoeke betrokke is, op.</p> <p>6. Los eenvoudige trigonometriese vergelykings vir hoeke tussen 0° en 90° op.</p> <p>7. Gebruik diagramme om die numeriese waardes van verhoudings vir hoeke van 0° tot 360° te bepaal.</p>	<p>(a) Lei af en gebruik die identiteite: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ en } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$</p> <p>(b) Lei die reduksieformules af.</p> <p>(c) Bepaal die algemene oplossing en/of die spesifieke oplossings van trigonometriese vergelykings.</p> <p>(d) Bepaal die sinus, kosinus en area-reëls.</p> <p>Los probleme in tweedimensionele figure op.</p>
	Graad 12-KABV
	<p>Bewys en gebruik die saamgestelde en dubbelhoekidentiteite.</p> <p>$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$; $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$;</p> <p>$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1$; and $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.</p> <p>Los probleme in twee- en driedimensionele figure op.</p>
TRIG GRAFIEKE GR 10 & 11	
<p>Punt vir Punt stippings van basiese grafieke gedefinieer deur $y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ en $y = \tan\theta$ vir $\theta \in [-360^\circ; 360^\circ]$</p> <p>Ondersoek die invloed van die parameter k op die grafieke van die funksies gedefinieer deur: $y = \sin(kx)$, $y = \cos(kx)$ en $y = \tan(kx)$.</p> <p>Ondersoek die invloed van die parameter p op die grafieke van die funksies gedefinieer deur: $y = \sin(x + p)$, $y = \cos(x + p)$ en $y = \tan(x + p)$.</p> <p>Teken sketsgrafieke van die funksies gedefinieer deur: $y = a \sin k(x + p)$,</p> <p>$y = a \cos k(x + p)$ en</p> <p>$y = a \tan k(x + p)$ hoogstens twee parameters op 'n keer.</p>	

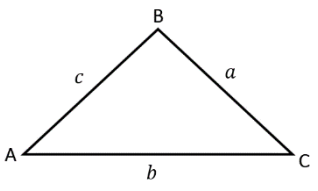
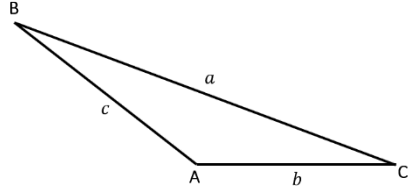
2. DEFINISIES; IDENTITEITE EN FORMULES

Let wel: Sommige van die onderstaande figure is uitreksels vanuit die “Mind The Gap” handboek.

<p><i>Definisies</i></p>   $\sin\theta = \frac{\text{teen}}{\text{skuins}} = \frac{y}{r}$ $\cos\theta = \frac{\text{aangr}}{\text{skuins}} = \frac{x}{r}$ $\tan\theta = \frac{\text{teen}}{\text{aangr}} = \frac{y}{x}$ $\text{cosec}\theta = \frac{\text{skuins}}{\text{teen}} = \frac{r}{y}$ $\text{sec}\theta = \frac{\text{skuins}}{\text{aangr}} = \frac{r}{x}$ $\text{cot}\theta = \frac{\text{aangr}}{\text{teenoor}} = \frac{y}{x}$	<p><i>Identiteite</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ • $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ <p style="text-align: center;">$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$ of $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$</p> <hr/> <p style="text-align: center;">BEWYS VAN IDENTITEITE</p> <p style="text-align: center;"><i>Bewys van die identiteite is eksamineerbaar.</i></p> 									
<p><i>Spesiale hoeke</i></p>  	<p><i>Bewys:</i></p> $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} = \frac{y}{r} \times \frac{r}{x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$									
<p><i>Reduksieformules</i></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$</td> <td>$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$</td> <td>$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$</td> </tr> <tr> <td>$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$</td> <td>$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$</td> <td>$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$</td> </tr> <tr> <td>$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$</td> <td>$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$</td> <td>$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$</td> </tr> </table>		$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$	$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$	$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$	$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$	$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$								
$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$								
$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$	$\tan(360^\circ - \theta) = -\tan\theta$								
<p><i>Negatiwe hoeke</i></p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>$\sin(-\theta) = -\sin\theta$</td> <td>$\cos(-\theta) = \cos\theta$</td> <td>$\tan(-\theta) = -\tan\theta$</td> </tr> </table>		$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$						
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$								
<p><i>Ko-funksies</i></p>  <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td>$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$</td> </tr> <tr> <td>$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$</td> </tr> <tr> <td>$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$</td> </tr> <tr> <td>$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$</td> </tr> </table>	$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$	$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$	$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$	<p><i>CAST-diagram</i></p> 					
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$										
$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin\theta$										
$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$										
$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$										

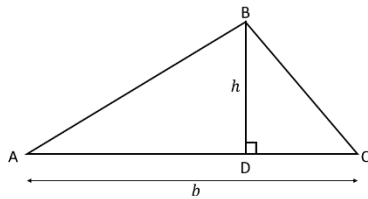
<p><i>Dubbelhoeke en saamgestelde hoeke</i></p> <ul style="list-style-type: none"> $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ <ul style="list-style-type: none"> $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $= 2\cos^2\alpha - 1$ $= 1 - 2\sin^2\alpha$ 	<p>Bewys:</p> <ul style="list-style-type: none"> $\cos(\alpha + \beta)$ $= \cos[\alpha - (-\beta)]$ $= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$ $= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ <p>Bewys:</p> <ul style="list-style-type: none"> $\sin(\alpha + \beta)$ $= \cos[90^\circ - (\alpha + \beta)] = \cos[90^\circ - \alpha - \beta]$ $= \cos[(90^\circ - \alpha) - \beta]$ $= \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\beta + \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\beta$ $= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ <p>Bewys:</p> <ul style="list-style-type: none"> $\sin(\alpha - \beta)$ $= \cos[90^\circ - (\alpha - \beta)] = \cos[90^\circ - \alpha + \beta]$ $= \cos[(90^\circ - \alpha) + \beta]$ $= \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\beta - \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin\beta$ $= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
---	---

<p><i>Ongedefinieerd</i></p> <ul style="list-style-type: none"> $\frac{\text{enige getal}}{0}$ is ongedefinieerd. As die noemer van die identiteit dus = 0, dan is die identiteit ongedefinieerd. $y = \tan x$ is ongedefinieerd vir sekere waardes van x. ($x = 90^\circ + 180k ; k \in Z$) As 'n tanfunksie dus in die identiteit is, dan is die identiteit ongedefinieerd waar die tanfunksie ongedefinieerd is. 	<p>Oppervlaktereël : $A = \frac{1}{2} ab\sin C$</p>	
	<p>As \hat{A} 'n skerphoek is</p>  <p>Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bh \dots \dots (1)$ Maar $\sin A = \frac{h}{c} \therefore h = c\sin A$</p> <p>Vervang in (1) Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bc\sin A$</p> <p>Netso kan dit aangetoon word dat: Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab\sin C$ Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} ac\sin B$</p>	<p>As \hat{A} 'n stomphoek is</p>  <p>Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bh \dots \dots (1)$ Maar $\sin(180^\circ - A) = \frac{h}{c}$ $\therefore h = c\sin A$</p> <p>Vervang in (1) Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} bc\sin A$</p> <p>Netso kan dit aangetoon word dat: Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} ab\sin C$ Opperv van $\Delta ABC = \frac{1}{2} ac\sin B$</p>

<p><i>Sinusreël: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$</i></p>		
<p>As \hat{A} 'n skerphoek is</p> 	<p>As \hat{A} 'n stomphoek is</p> 	
<p>Gebruik die oppervlaktereël vir ΔABC:</p> $\frac{1}{2} bc\sin A = \frac{1}{2} ab\sin C = \frac{1}{2} ac\sin B$ <p>Deur elke term deur $\frac{1}{2} abc$ te deel, gee dit: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$</p>		

Kosinusreël: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

As \hat{A} 'n
skerphoek is



$$\begin{aligned} \text{In } \triangle BDC: a^2 &= BD^2 + CD^2 \quad (\text{Stelling van Pythagoras}) \\ &= BD^2 + (b - AD)^2 \\ &= BD^2 + b^2 - 2bAD + AD^2 \end{aligned}$$

$$\text{Maar } BD^2 + AD^2 = c^2 \quad (\text{Stelling van Pythagoras})$$

$$\text{Dus } a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD \quad \dots \dots (1)$$

$$\text{In } \triangle ABD: \cos A = \frac{AD}{c} \quad \therefore AD = c \cos A \quad \dots \dots (2)$$

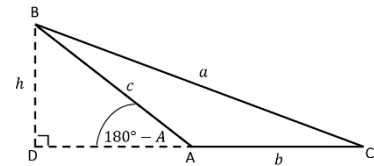
$$\begin{aligned} \text{Vervang (2) in (1)} \\ \therefore a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

Netso kan dit aangetoon word dat:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{en}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

As \hat{A} 'n
stomphoek is



$$\begin{aligned} \text{In } \triangle BDC: a^2 &= BD^2 + CD^2 \quad (\text{Stelling van Pythagoras}) \\ &= BD^2 + (b + AD)^2 \\ &= BD^2 + b^2 + 2bAD + AD^2 \end{aligned}$$

$$\text{Maar } BD^2 + AD^2 = c^2 \quad (\text{Stelling van Pythagoras})$$

$$\text{Dus } a^2 = b^2 + c^2 + 2bAD \quad \dots \dots (1)$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle ABD: \cos(180^\circ - A) &= \frac{AD}{c} \\ \therefore AD &= c \cos A \quad \dots \dots (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vervang (2) in (1)} \\ \therefore a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

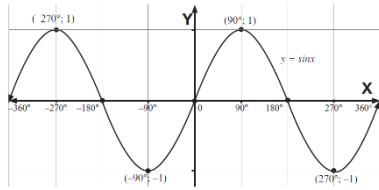
Netso kan dit aangetoon word dat:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{en}$$

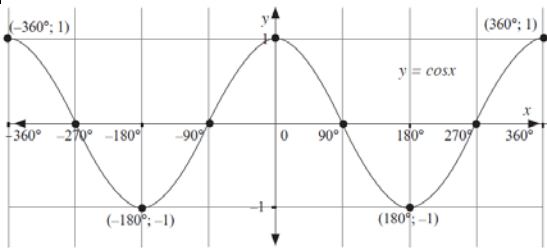
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Trig grafieke

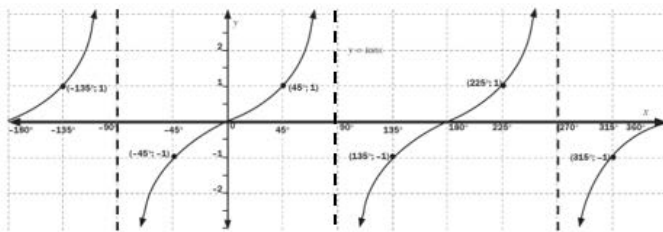
• $y = \sin x$



• $y = \cos x$

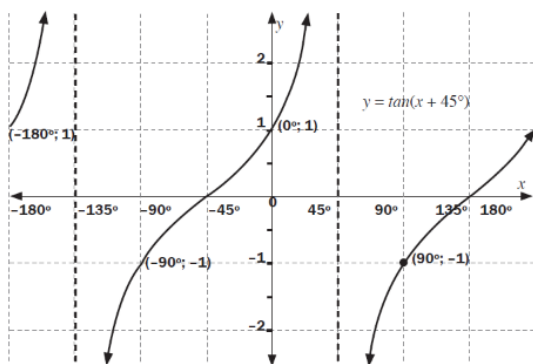


• $y = \tan x$

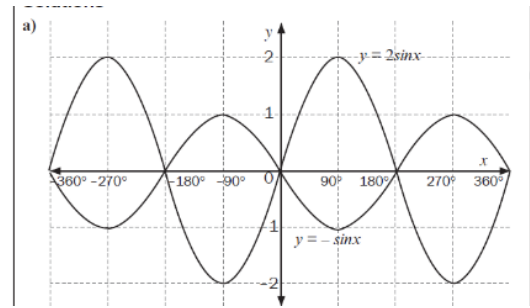


Asimptote by $x = 90^\circ + 180^\circ k; k \in \mathbb{Z}$

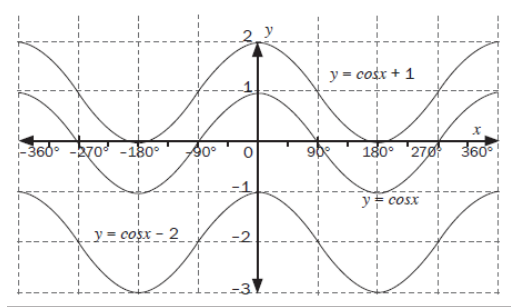
• $y = \tan(x + 45^\circ) \rightarrow$ Grafiek skuif 45° na links.



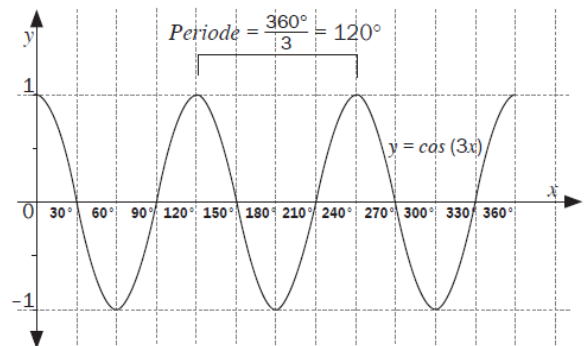
• $y = 2\sin x \rightarrow$ amplitude verander van 1 na 2



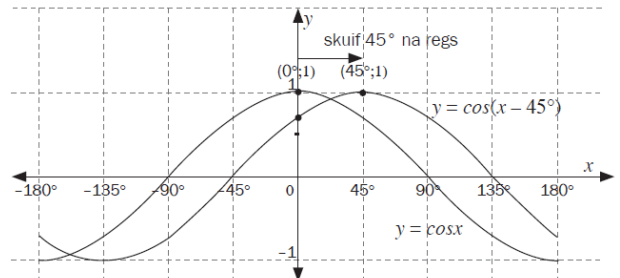
• $y = \cos x + 1$ en $y = \cos x - 2$
Grafiek skuif 1 eenheid op / Grafiek skuif 2 eenhede af



• $y = \cos 3x \rightarrow$ periode verander van 360° na $\frac{360^\circ}{3}$



• $y = \cos(x - 45^\circ) \rightarrow$ Grafiek skuif 45° na regs.



Afdeling A:

Let Wel:

- Vrae in hierdie hersiening is saamgestel uit nasionale eksamenvraestelle vir GR 12.
- Sommige vrae is verander om aan te pas by die inhoud wat in die VOO-lesse vir Gr 12 behandel word.

AFDELING A (Roetine vrae)

VRAAG 1

(GR12 NSC NOV 2019)

1.1 1.1.1 Vereenvoudig die volgende uitdrukking tot EEN trigonometriese term:

$$\frac{\sin x}{\cos x \cdot \tan x} + \sin(180^\circ + x) \cos(90^\circ - x)$$

1.1.2 **Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik**, bepaal die waarde van:

$$\frac{\sin^2 35^\circ - \cos^2 35^\circ}{4 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}$$

(GR12 NSC NOV 2017)

1.2 Gegee: $\frac{\sin(A - 360^\circ) \cdot \cos(90^\circ + A)}{\cos(90^\circ - A) \cdot \tan(-A)}$

Vereenvoudig die uitdrukking tot 'n enkele trigonometriese verhouding.

(GR12 NSC NOV 2017)

1.3 Bewys:

1.3.1 $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \cdot \sin B$

1.3.2 **Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, dat $\sin 77^\circ - \sin 43^\circ = \sin 17^\circ$

(GR12 NSC Maart 2018)

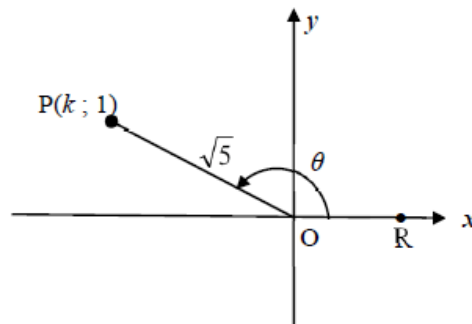
1.4 Vereenvoudig: $\sin(180^\circ - x) \cdot \cos(-x) + \cos(90^\circ + x) \cdot \cos(x - 180^\circ)$
tot 'n enkele trigonometriese verhouding.

1.5 Bepaal die waarde van $\sin 3x \cdot \cos y + \cos 3x \cdot \sin y$ as $3x + y = 270^\circ$

VRAAG 2

(GR12 NSC NOV 2018)

2.1 In die diagram is $P(k; 1)$ 'n punt in die 2^{de} kwadrant, $\sqrt{5}$ eenhede vanaf die oorsprong. R is 'n punt op die positiewe x -as en stomphoek $R\hat{O}P = \theta$.



2.1.1 Bereken die waarde van k .

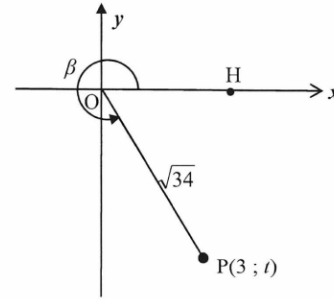
2.1.2 Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van:

- $\tan \theta$
- $\cos(180^\circ + \theta)$
- $\sin(\theta + 60^\circ)$ in die vorm $\frac{a+b}{\sqrt{20}}$

(GR12 NSC NOV 2017)

2.2 In die diagram, is $P(3; t)$ 'n punt in die Cartesiese vlak. $OP = \sqrt{34}$ en $\widehat{HOP} = \beta$ is 'n reflekshoek.

Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van:

2.2.1. t 2.2.2. $\tan \beta$ 2.2.3. $\cos 2\beta$ 

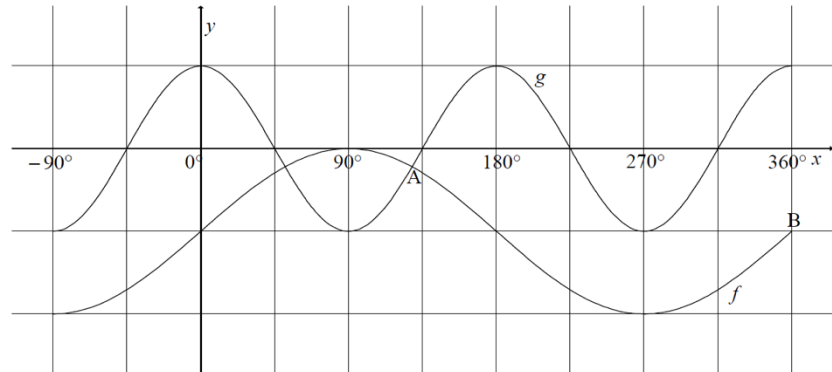
(GR12 NSC Maart 2018)

2.3 As $\cos 2\theta = -\frac{5}{6}$, waar $2\theta \in [180^\circ; 270^\circ]$, bereken, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waardes in eenvoudigste vorm van:2.3.1 $\sin 2\theta$ 2.3.2 $\sin^2 \theta$ **VRAAG 3**

3.1 In die diagram, is die grafieke van

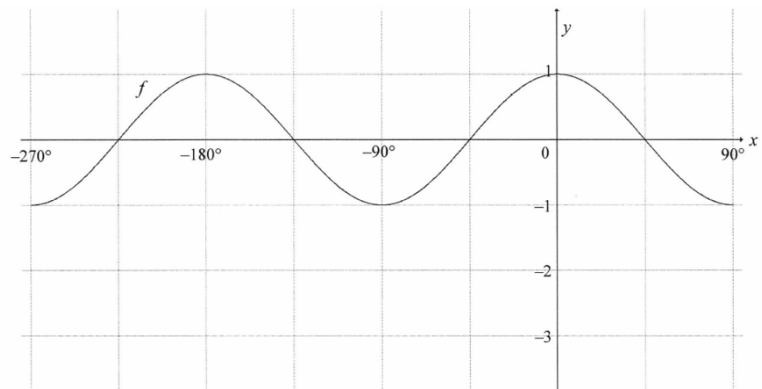
 $f(x) = \sin x - 1$ en $g(x) = \cos 2x$ vir die interval

$$x \in [-90^\circ; 360^\circ]$$

geskets. Grafieke f en g sny by A.B ($360^\circ; -1$) is 'n punt op f .3.1.1 Skryf die waardeversameling van f neer.3.1.2 Skryf die waardes van x in die interval $x \in [-90^\circ; 360^\circ]$ waarvoor die grafiek f afnemend is.

(GR 12 NSC November 2017)

3.2 In die diagram, is die grafiek

van $f(x) = \cos 2x$ vir dieinterval $x \in$ $[-270^\circ; 90^\circ]$ geskets.3.2.1 Skets die grafiek van $g(x) = 2\sin x - 1$ vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$ op 'n gegewe rooster. Toon AL die afsnitte met die asse asook die draaipunte.3.2.2 Gestel A is 'n snypunt van die grafieke van f en g . Toon aan dat die x -koördinaat van A die vergelyking $\sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, bevredig.3.2.3 Bereken vervolgens die koördinate van die snypunkte van grafieke van f en g vir die interval $x \in [-270^\circ; 90^\circ]$.

VRAAG 4

4.1 Bepaal die algemene oplossing van die volgende vergelykings:

4.1.1 $\sin 2x + \cos x = 0$

4.1.2 $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$

(GR12 NSC March 2018)

4.2 Gegee: $2\cos x = 3\tan x$

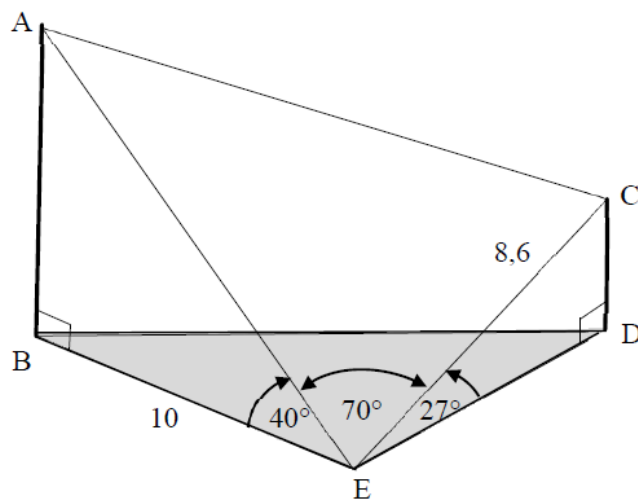
4.2.1 Toon dat die vergelyking as $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ herskryf kan word.

4.2.2 Bepaal die algemene oplossing van x as $2\cos x = 3\tan x$.

VRAAG 5

(NSC Maart 2017)

In the diagram is, B, E en D punte in dieselfde horisontale vlak. AB en CD is vertikale pale. Staal kabels AE en CE anker die pale by E. 'n Ander staal kabel verbind A en C. $CE = 8,6m$, $BE = 10m$, $\widehat{AEB} = 40^\circ$, $\widehat{AEC} = 70^\circ$ en $\widehat{CED} = 27^\circ$.



Bereken die:

5.1 Hoogte van paal CD.

5.2 Lengte van kabel AE.

5.3 Lengte van kabel AC.

Afdeling B: (Komplekse vrae)

VRAAG 1

(GR12 NSC March 2016)

1.1 1.1.1 Vereenvoudig $\frac{4\sin x \cos x}{2\sin^2 x - 1}$ tot 'n enkele trigonometriese verhouding.

1.1.2 Bereken vervolgens die waarde van $\frac{4\sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2\sin^2 15^\circ - 1}$

SONDER om 'n sakrekenaar te gebruik. (Laat jou antwoord in die eenvoudigste wortelvorm.)

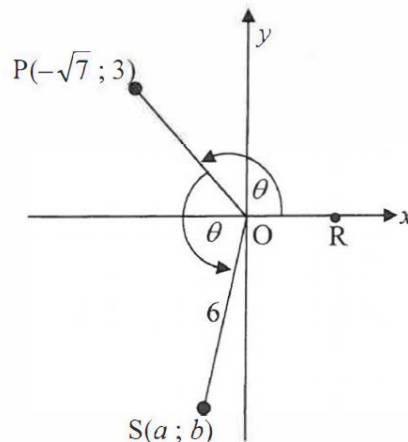
(GR12 NSC NOV 2018)

1.2 Bewys die volgende identiteit: $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2\tan 2x$

VRAAG 2

(GR12 NSC March 2016)

2.1 P($-\sqrt{7}; 3$) en S($a; b$) is punte op die Cartesiese vlak, soos getoon in die diagram hieronder. $\widehat{POR} = \widehat{POS} = \theta$ en OS = 6



Bepaal, SONDER die gebruik van 'n sakrekenaar, die waarde van:

- 2.1.1 $\tan \theta$
 2.1.2 $\sin(-\theta)$
 2.1.3 a

(GR12 NSC NOV 2019)

2.2 Gegee: $\cos 26^\circ = m$

Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bepaal $2\sin^2 77^\circ$ in terme van m .

(GR12 NSC NOV 2015)

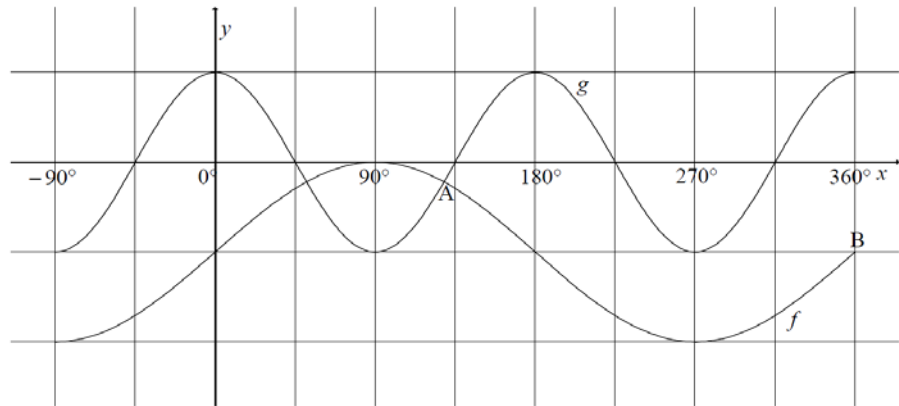
2.3 Gegee dat $\sin 23^\circ = \sqrt{k}$, bepaal, in die eenvoudigste vorm, die waarde van elk van die volgende in terme van k , SONDER om 'n sakrekenaar te gebruik.

- 2.3.1 $\sin 203^\circ$
 2.3.2 $\cos 23^\circ$
 2.3.3 $\tan(-23^\circ)$

VRAAG 3

(GR 12 NSC November 2019)

- 3.1 In die diagram, is die grafieke van $f(x) = \sin x - 1$ en $g(x) = \cos 2x$ geskets vir die interval $x \in [-90^\circ; 360^\circ]$. Grafieke f en g sny by A. B ($360^\circ; -1$) is 'n punt op f .



P en Q is punte op grafieke g en f onderskeidelik, sodat PQ parallel aan die y -as is. As PQ tussen A en B lê, bepaal die waarde (s) van x waarvoor PQ 'n maksimum is.

(GR 12 NSC March 2018)

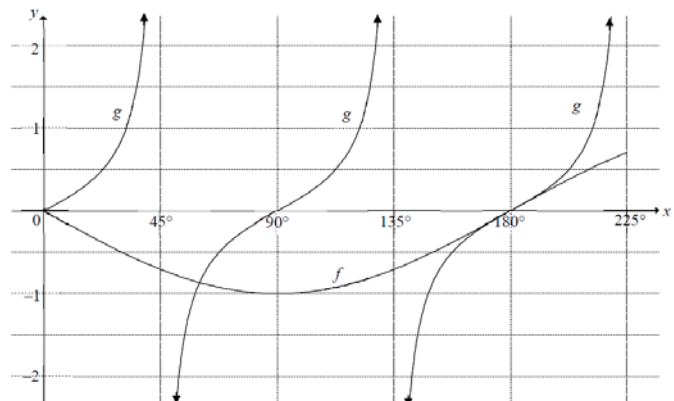
- 3.2 Beskou: $g(x) = -4\cos(x + 30^\circ)$
- 3.2.1 Skryf die maksimum waarde van $g(x)$ neer.
 - 3.2.2 Bepaal die waardeversameling van $g(x) + 1$.
 - 3.2.3 Die grafiek van g word 60° na links geskuif en dan om die x -as gereflekteer om 'n nuwe grafiek h te vorm. Bepaal die vergelyking van h in sy eenvoudigste vorm.

(GR12 NSC NOV 2018)

- 3.3 Beskou: $f(x) = -2 \tan \frac{3}{2}x$
- 3.3.1 Skryf die periode van f neer.
 - 3.3.2 Die punt A ($t; 2$) lê op die grafiek. Bepaal die algemene oplossing van t .
 - 3.3.3 Skets die grafiek van f vir die interval $x \in [-120; 180^\circ]$. Toon duidelik ALLE asimptote, afsnitte met die asse en eindpunt(e) van die grafiek aan.
 - 3.3.4 Gebruik die grafiek om te bepaal vir watter waarde(s) van x is $f(x) \geq 2$ vir $x \in [-120; 180^\circ]$.
 - 3.3.5 Beskryf die transformasie van grafiek f om die grafiek van $g(x) = -2 \tan(\frac{3}{2}x + 60^\circ)$ te vorm.

(GR12 NSC Maart 2017)

- 3.4 In die diagram, is die grafieke van die funksies $f(x) = a \sin x$ en $g(x) = \tan bx$ geskets op dieselfde assestelsel vir die interval $0^\circ \leq x \leq 225^\circ$.



- 3.4.1 Bepaal die waardes van a en b .
- 3.4.2 Bepaal die periode van $f(3x)$.
- 3.4.3 Bepaal die waardes van x in die interval $90^\circ \leq x \leq 225^\circ$ waarvoor $f(x) \cdot g(x) \leq 0$.

VRAAG 4

(GR12 DBE 2018)

4.1 Bepaal die algemene oplossing van die volgende vergelyking:

$$\sin(2x + 40^\circ) \cos(x + 30^\circ) - \cos(2x + 40^\circ) \sin(x + 30^\circ) = \cos(2x - 20^\circ)$$

(GR12 DBE 2019)

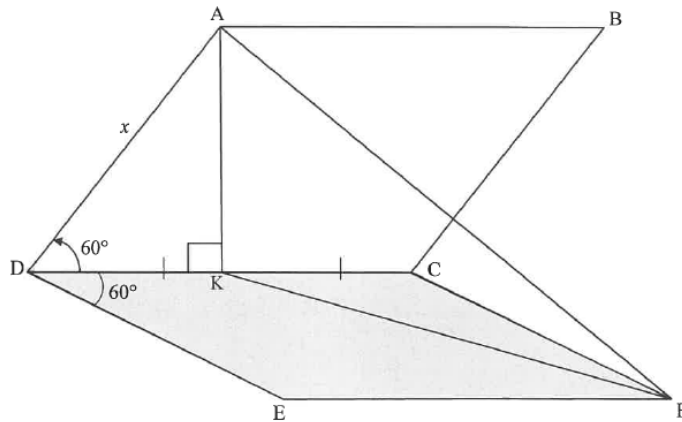
4.2 Bepaal die algemene oplossing van $\cos(x - 30^\circ) = 2\sin x$

(GR12 NSC NOV 2019)

4.3 Beskou : $f(x) = \sin(x + 25^\circ) \cos 15^\circ - \cos(x + 25^\circ) \sin 15^\circ$ 4.3.1 Bepaal die algemene oplossing van $f(x) = \tan 165^\circ$ 4.3.2 Bepaal die waarde(s) van x in die interval $x \in [0^\circ; 360^\circ]$ waarvoor $f(x)$ 'n minimum waarde sal hê.**VRAAG 5**

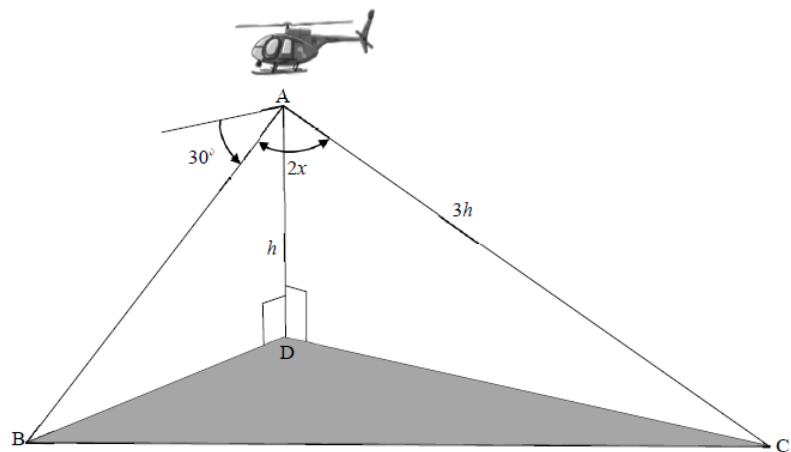
(GR12 NSC NOV 2019)

5.1 Die diagram hieronder toon 'n sonpaneel, ABCD, wat aan 'n plat stuk sementblad EFCD vasgeheg is. ABCD en EFCD is twee identiese ruite. K, is 'n punt op DC sodanig dat $DK = KC$ en $AK \perp DC$. AF en KF is getrek. $\widehat{ADC} = \widehat{CDE} = 60^\circ$ en $AD = x$ eenhede.

5.1.1 Bepaal AK in terme van x .5.1.2 Skryf die grootte van \widehat{KCF} neer.5.1.3 Verder word gegee dat \widehat{ARF} , die hoek tussen die sonpaneel en die sementblad, gelyk is aan y . Bepaal die oppervlakte van ΔAKF in terme van x en y .

(GR12 NSC NOV 2018)

5.2 'n Loods vlieg in 'n helikopter. By punt A, wat h meter direk bokant punt D op die grond is, neem hy 'n vreemde voorwerp by punt B waar. Die loods bepaal dat die dieptehoek vanaf A na B, 30° is. Hy bepaal ook dat die kontrolekamer by punt C, $3h$ meter vanaf A is en dat $\widehat{BAC} = 2x$. Punte B, C en D is in dieselfde horisontale vlak. Hierdie scenario word in die diagram hieronder getoon.

5.2.1 Bepaal die afstand AB in terme van h .5.2.2 Toon dat die afstand tussen die vreemde voorwerp by punt B en die kontrolekamer by punt C deur $BC = h\sqrt{25 - 24\cos^2 x}$ gegee word.