



WISKUNDE

HERSIENINGSBOEKIE 2025 KWARTAAL 2

Graad 12

Hierdie hersieningsprogram is bedoel om u te help met die hersiening van kritieke inhoud en vaardighede wat gedoen was gedurende die 2de kwartaal. Die doel is om u voor te berei om die sleutelbegrippe te verstaan en u die geleentheid te gee om die vereiste standaard en die toepassing van die kennis wat nodig is om in die NCS-eksamen te slaag, te bereik.

Die hersieningsprogram dek die volgende onderwerpe:

- Analitiese meetkunde(± 40 van 150 punte in Vraestel 2)
- Funksies en Inverse funksies(± 35 van 150 punte in Vraestel 1)
- Differensiaalrekenen/Calculus(± 35 van 150 punte in Vraestel 1)

INHOUDSBLAD

INHOUD

BLADSY

ANALITIESE MEETKUNDE

- OPSOMMING 4 – 8
 - 1. OPSOMMING GRAAD 10 & 11
 - 2. OPSOMMING GRAAD 12
- AFDELING A 9 – 11
- AFDELING B 12 – 15

FUNKSIES

- OPSOMMING 15 – 21
 - 1. KABV UITTREKSEL UIT GRAAD 10-12
 - 2. FUNKSIE TERMINOLOGIE
 - 3. DIE MOEDERFUNKSIE EN DIE INVLOED VAN PARAMETERS
 - 4. SKETS VAN GRAFIEKE
 - 5. OM DIE VERGELYKING VAN 'N GRAFIEK TE BEPAAL
 - 6. TRANSFORMASIES
 - 7. GRAFIEKE EN ONGELYKHEDE
 - 8. INVERSE FUNKSIES
- AFDELING A 23 – 24
- AFDELING B 25 – 27
- AFDELING C. 28 – 31

CALCULUS

- OPSOMMING 32
- AFDELING A 33 – 34
- AFDELING B 35 – 38

Liewe Leerder

Die hersienings materiaal vir kwartaal 2 is:

- Analitiese Meetkunde: ± 40 van die 150 punte van Vraestel 1
- Funksies en Grafieke (inverse funksies): ± 35 van die 150 punte van Vraestel 1
- Calculus: ± 35 van die 150 punte van Vraestel 1

Elk van die bogenoemde onderwerpe is soos volg saamgestel:

- 'n Opsomming van kern konsepte in die onderwerp.
- Afdeling A, noodsaaklike vrae wat die leerders moet kan beantwoord om ten minste 30% in Wiskunde te verkry.
- Afdeling B, dit is vrae op 'n hoër vlak en is gemik op leerders wat 50% en meer wil behaal.
- Afdeling C, waar moontlik soos met funksies en grafieke, is vrae uit die graad 12 eksamen vraestel, wat fokus op die inhoud van die onderwerp wat in graad 11 behandel is.

Maak asseblief seker om deeglik deur die opsomming van die kern konsepte aan die begin van elke onderwerp te werk. Dit is noodsaaklik voordat julle begin met afdeling A, B en C. Indien enige gedeelte van die notas nie verstaanbaar is nie is dit belangrik dat jy ondersteuning daarin ontvang. Enige probleme wat ondervind word dui aan op 'n tekortkoming in die verstaan van sommige konsepte wat dan die voltooiing van die vrae oor die onderwerp sal belemmer. Maak seker dat jy ondersteuning kry vanaf 'n tutor, onderwyser, raadpleeg jou handboek of kry aanlyn ondersteuning. Jy kan ook gebruik maak van die tutonic videos om sekere konsepte beter te verstaan.

Deur die druk van die skakel,

<https://drive.google.com/file/d/1zTP5b9tg4x5xir9chJcY9W4vonnEj0q4/view?usp=sharing> kry jy toegang na die Tutonic breinkaart met videos van Analitiese Meetkunde.

Deur die druk van die skakel,

<https://drive.google.com/file/d/1y-xEL7Zt7RQhtdfPieL5BxXss7FvogeV/view?usp=sharing> kry jy toegang na die Tutonic breinkaart met videos van Funksies en grafieke. Die breinkaart dek Funksies en grafieke, Inverse Funksies en Calculus.

Deur die druk van die blou balletjies by die bostaande breinkaarte kry jy toegang tot die video wat die konsepte langs die bolletjie verduidelik.

Nadat jy deur die opsomming van die onderwerpe gewerk het begin om die vrae oor die onderwerp te beantwoord. Toets jou antwoorde gereeld soos julle deur die materiaal vorder. Dit is belangrik om te weet of julle antwoorde reg is voordat julle vorder na die volgende vrae. Jy sal baie leer deur te kyk na die oplossings asook na die uitleg van die oplossing. As jy nie instaat is om 'n spesifieke vraag te begin nie, is dit goed dat jy eers na die memorandum kyk want dit is deel van die leerproses. Merk die vraag en maak seker om dit weer 'n dag later te probeer. Spandeer ten minste 1 uur per dag aan wiskunde hersiening asseblief.

Baie dankie dat jy elke dag jou Wiskunde hersien in jou voorbereiding vir die eksamen. Die besef van gereelde werk in Wiskunde is die belangrikste tot sukses in die vak.

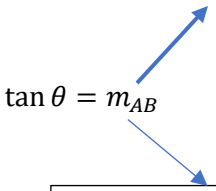
Als van die beste!!!!

ANALITIESE MEETKUNDE

OPSOMMING:

1. OPSOMMING EN KENNIS VAN VORIGE GRADE

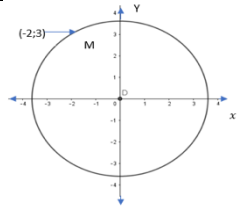
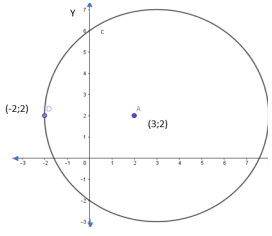
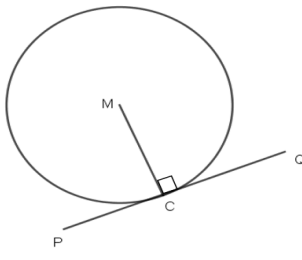
FORMULUS/KONSEPTE	Opsomming van prosedure	VOORBEELD
Veronderstel $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ is twee punte op 'n a Cartesiese vlak.		$A(-3; -5)$ en $B(2; 3)$ is punte op 'n Cartesiese vlak.
Afstand of Lengte van 'n lyn Formule: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	Benoem die twee punte as $punt_1$ en $punt_2$. Vervang dan om afstand (d) te bepaal.	Bepaal die lengte van AB: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $d_{AB} = \sqrt{((2) - (-3))^2 + ((3) - (-5))^2}$ $d_{AB} = \sqrt{(2 + 3)^2 + (3 + 5)^2}$ $d_{AB} = \sqrt{(5)^2 + (8)^2} = \sqrt{89} = 9,43$
Middelpunt van 'n lyn: $\left(\frac{x_2 + x_1}{2}; \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$	Benoem die twee punte as $punt_1$ en $punt_2$. Vervang dan om middelpunt te bepaal.	Bepaal die koördinate van E, die middelpunt van AB. $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ $E\left(\frac{-3 + 2}{2}; \frac{-5 + 3}{2}\right)$ $E\left(\frac{-1}{2}; \frac{-2}{2}\right)$ $= E\left(\frac{-1}{2}; -1\right)$
Gradiënt: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Benoem die twee punte as $punt_1$ en $punt_2$. Vervang dan om gradiënt te bepaal.	Bepaal die gradiënt van AB. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m_{AB} = \frac{(3) - (-5)}{(2) - (-3)} = \frac{3 + 5}{2 + 3} = \frac{8}{5}$
Ewewydige Lyne (\parallel lyne) Die gradiënte van die lyne is gelyk d.i. $m_1 = m_2$	Bepaal die gradiënt van een lyn, dan is die gradiënt van die ewewydige lyn dieselfde.	Bepaal die gradiënt van CD as $CD \parallel AB$. $m_{AB} = \frac{8}{5}$ $\therefore m_{CD} = \frac{8}{5} \quad \text{want } CD \parallel AB$
Loodregte Lyne (\perp lyne) die produk van die gradiënte is -1 d.i $m_1 \times m_2 = -1$	Neem die omgekeerde van die gegewe gradiënt en verander die teken. Gegee $m_1 = +\frac{8}{5}$ dan is $m_2 = -\frac{5}{8}$	Bepaal die gradiënt van CD as $CD \perp AB$. $m_{AB} = +\frac{8}{5}$ $\therefore m_{CD} = -\frac{5}{8} \quad \text{want } CD \perp AB$
Kollineêre Punte A, B en C $m_{AB} = m_{BC}$	Bereken m van segmente; een punt is gemeen. i.e. $m_{AB} = m_{BC}$	Bepaal of die punte $A(-3; -5)$, $B(2; 3)$ en $C(7; 11)$ kollineêr is. $m_{AB} = \frac{8}{5}$ $m_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ $m_{BC} = \frac{(11) - (3)}{(7) - (2)}$ $m_{BC} = \frac{(11 - 3)}{(7 - 2)}$ $m_{BC} = \frac{8}{5}$ Gevolgtik is A, B en C Kollineêr .

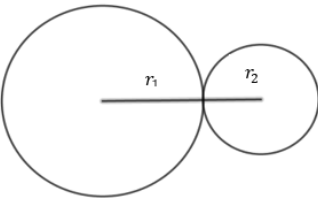
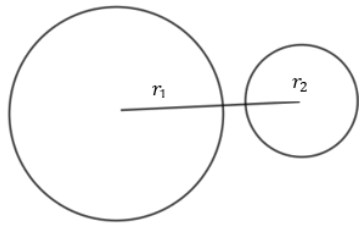
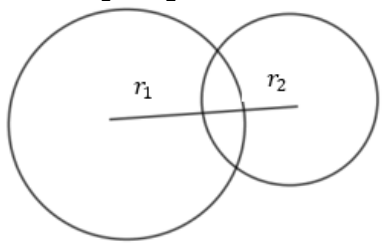
<p>Gradiënt (inklinasie) van 'n lyn</p> <p>$\tan \theta = m_{AB}$</p> <p>θ is die inklinasie hoek</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $m > 0 \rightarrow \theta < 90^\circ$ </div>  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $m < 0 \rightarrow 90^\circ < \theta < 180^\circ$ </div>	<p>Gebruik die sakrekenaar om $\tan^{-1}(m)$ te bepaal.</p> <p>Gebruik die positiewe waarde van m.</p> <p>As m negatief is, moet die hoek wat u verkry van 180° afgetrek word.</p>	<p>(a) Bepaal die inklinasie van AB</p> <p>$m_{AB} = \frac{8}{5}$ en $\tan \theta = m_{AB}$</p> <p>$\therefore \tan \theta = \frac{8}{5}$</p> <p>$\theta = 57,99^\circ$</p> <p>(b) Gegee S (-3; 2) en O (2; -4) bepaal die inklinasie van SO.</p> <p>$m_{SO} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</p> <p>$m_{SO} = \frac{(-4) - (2)}{(2) - (-3)}$</p> <p>$m_{SO} = \frac{(-4 - 2)}{(2 + 3)}$</p> <p>$m_{SO} = \frac{-6}{5}$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\tan \theta = m_{SO}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> $\therefore \tan \theta = -\frac{6}{5}$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>NB! Moenie die (-) teken op die rekenaar gebruik</p> </div> <p>Verwysingshoek = $50,19^\circ$</p> <p>$\therefore \theta = 180^\circ - 50,19^\circ = 129,8^\circ$</p>
Vergelyking van 'n Lyn		
<p>$y = mx + c$</p>	<p>Gebruik as m en c bekend is.</p>	<p>Bepaal die vergelyking van die lyn met gradiënt $\frac{8}{5}$ wat die y-as by -3 sny.</p> <p>Vergelyking van die lyn is: $y = \frac{8}{5}x - 3$</p>
<p>$y - y_1 = m(x - x_1)$</p>	<p>Gebruik as 1 punt en die gradiënt gegee word.</p>	<p>Bepaal die vergelyking van die lyn wat deur $P(4; 3)$ gaan met 'n gradiënt van -1.</p> <p>$y - y_1 = m(x - x_1)$</p> <p>$\therefore y - 3 = -1(x - 4)$</p> <p>$\therefore y - 3 = -x + 4$</p> <p>$\therefore y = -x + 7$</p>
<p>$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$</p>	<p>Gebruik as 2 punte gegee word.</p>	<p>Bepaal die vergelyking van die lyn passing wat deur die punte $A(-3; -5)$ en $B(2; 3)$ gaan.</p> <p>$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$</p> <p>$y - (-5) = \frac{3 - (-5)}{2 - (-3)}(x - (-3))$</p> <p>$y + 5 = \frac{3 + 5}{2 + 3}(x + 3)$</p> <p>$y + 5 = \frac{8}{5}(x + 3)$</p> <p>$y = \frac{8}{5}x + \frac{24}{5} - 5$</p> <p>$y = \frac{8}{5}x - \frac{1}{5}$</p>

In Analitiese Meetkunde kan vrae gevra word wat vereis dat u die eienskappe van die verskillende vierhoeke ken. Die eienskappe van die verskillende vierhoeke wat u in graad 10 geleer het, word in die onderstaande tabel gegee. Die onderstaande tabel bevat 'n opsomming van die verskillende eienskappe wat u moet toon vir 'n spesifieke vierhoek, om te bewys dat dit 'n Parallelogram, reghoek, ruit, vierkant, trapesium of vlieër is.

Vierhoeke	Word gebruik om te bewys dat 'n vierhoek 'n Parallelogram, Reghoek, Ruit, Vierkant, Trapesium of Vlieër is.
A. Parallelogram	<ul style="list-style-type: none"> • 1 paar teenoorstaande sye is = en // • 2 pare teenoorstaande sye is = • 2 pare teenoorstaande sye is // • 2 pare teenoorstaande \angle'e is = <p>Hoeklyne halveer mekaar</p> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">} any } one</div>
B. Reghoek	<ul style="list-style-type: none"> • bewys dat die figuur 'n parallelogram is <p>+ 1 hoek = 90°</p> <p>+ hoeklyne is =</p> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">} + enige een</div>
C. Ruit	<ul style="list-style-type: none"> • bewys dat die figuur 'n parallelogram is <p>+ hoeklyne sny \perp</p> <p>+ alle sye is =</p> <p>+ hoeklyne halveer \angle'e</p> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">} + enige een</div>
D. Vierkant	<ul style="list-style-type: none"> • bewys dat die figuur 'n parallelogram is <p>+ 1 hoek = 90°</p> <p>+ hoeklyne is =</p> <p>+ hoeklyne sny \perp</p> <p>+ alle sye is =</p> <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">} + enige een van hierdie en } + enige een van hierdie</div>
E. Trapesium	1 paar teenoorstaande sye is //
F. Vlieër	<ul style="list-style-type: none"> • 1 paar teenoorstaande sye is = • hoeklyne sny \perp • <div style="text-align: right; margin-top: 10px;">} enigey 1</div>

2. OPSOMMING VAN GRAAD 12 KONSEPTE

FORMULUS/KONSEPTE	Opsomming van prosedure	VOORBEELD
<p>Vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $(0; 0)$ en radius r:</p> $x^2 + y^2 = r^2$	<p>Vervang die punt op die sirkel om r^2 te kry.</p>	<p>Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt $D(0; 0)$ deur $(-2; 3)$.</p>  <p style="text-align: right;">Sirkel formule</p> $x^2 + y^2 = r^2$ $r^2 = 13$ $x^2 + y^2 = 13$
<p>Vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $(a; b)$ en radius r</p> $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	<p>Bepaal die middelpunt van die sirkel as dit nie gegee is nie en die radius r.</p>	<p>Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt by $A(3; 2)$ en $D(-2; 2)$ op die omtrek.</p>  <p style="text-align: right;">Sirkel formule</p> $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ $r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $r = \sqrt{(-2 - 3)^2 + (2 - 2)^2}$ $r = \sqrt{(-5)^2 + (0)^2}$ $r = \sqrt{25} = 5$ $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$
<p>Raaklyn aan 'n sirkel :</p> $y = mx + c$	<p>Bereken die gradiënt van die radius wat die middelpunt met die kontak punt verbind. Om die gradiënt van die raaklyn te kry, gebruik $m_{\text{raaklyn}} \cdot m_{\text{radius}} = -1$</p> <p>Vervang m_{raaklyn} en die kontak punt in die vergelyking van die reguit lyn. Vereenvoudig</p> 	<p>Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel met middelpunt $M(-2; 1)$ en $C(3; -1)$. C is die kontak punt van radius en raaklyn. $MC \perp PQ$.</p> <p>Oplossing:</p> $m_{MC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $m_{MC} = \frac{(-1) - (1)}{(3) - (-2)} = \frac{-1 - 1}{3 + 2} = \frac{-2}{5}$ $m_{PQ} = +\frac{5}{2} \text{ want } MC \perp PQ.$ <p>en $C(3; -1)$ is op die raaklyn</p> $\therefore y - y_1 = m(x - x_1)$ $y - (-1) = \left(\frac{5}{2}\right)(x - 3)$ $y + 1 = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2}$ $y = \frac{5}{2}x - \frac{15}{2} + 1$ $y = \frac{5}{2}x - \frac{13}{2}$

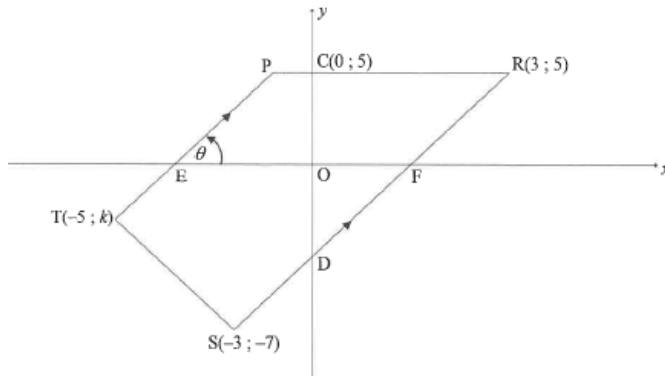
<p>Algebraïese manipulasie om die middelpunt van 'n sirkel te bepaal.</p>	<p>Om die middelpunt van 'n sirkel te bepaal.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Groepeer gelyksoortige veranderlikes bymekaar, konstante term op die RK • Voltooi die kwadraat in elke hakie deur 'n derde term by te tel. • Aan die RK tel dieselfde getalle by soos in elke hakie. • Aan die LK kan elke hakie as 'n volkome kwadraat geskryf word, terwyl die RH vereenvoudig kan word. 	<p>Gegee die vergelyking van 'n sirkel: $x^2 + y^2 + 2x - 12y - 12 = 0$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Groepeer gelyksoortige veranderlikes bymekaar, konstante term op die RK $(x^2 + 2x) + (y^2 - 12y) = 12$ • Voltooi die kwadraat in elke hakie deur 'n derde term by te tel. Aan die RK tel dieselfde getalle by soos in elke hakie. $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 12y + 36) = 12 + 1 + 36$ • Aan die LK kan elke hakie as 'n volkome kwadraat geskryf word, terwyl die RH vereenvoudig kan word $(x + 1)^2 + (y - 6)^2 = 49$ <p>Middelpunt van die sirkel $(a; b) = (-1; 6)$</p>
<p>Om te bepaal of twee sirkels mekaar,</p> <p>a) Raak b) Nie raak nie c) sny</p> <p>Afstand (D) tussen middelpunte</p>	<p>Bepaal die radius van elke sirkel. Dan die som van die radii d.i $r_1 + r_2$.</p>	<p>a) As twee sirkels mekaar raak dan is: $D = r_1 + r_2$</p>  <p>b) As twee sirkels mekaar nie sny nie, dan is: $D > r_1 + r_2$</p>  <p>c) As twee sirkels mekaar sny, dan is: $D < r_1 + r_2$</p> 

AFDELING A

Vraag 1

DBE NOV 2019

1. In die diagram is P, R(3; 5), S(-3; -7) en T(-5; k) hoekpunte van trapesium PRST. PT \parallel RS. RS en PR sny die y - as by D en C(0; 5) respektiewelik. PT en RS sny die x - as by E en F respektiewelik. $\hat{PEF} = \theta$.



- 1.1 Skryf neer die vergelyking van PR. (1)
- 1.2 Bereken die: (2)
- 1.2.1 Gradiënt van RS. (2)
- 1.2.2 Grootte van θ (3)
- 1.2.3 Koördinate van D (3)
- 1.3 As dit gegee word dat $TS = 2\sqrt{5}$, bereken die waarde van k . (4)
- 1.4 Parallelogram TDNS, met N in die 4^{de} kwadrant, is geteken. Bereken die koördinate van N. (3)
- 1.5 ΔPRD gereflekteer word in die y - as om $\Delta P'R'D'$ te vorm, bereken die grootte van $\angle RDR'$. (3)
- [19]**

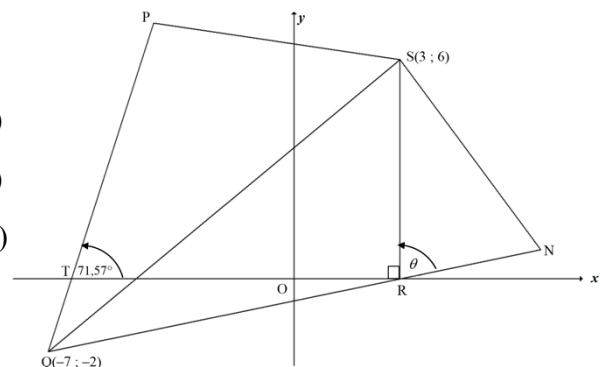
VRAAG 2

DBE Feb-Mar 2018

In die diagram is P, Q(-7; -2), R en S(3; 6) hoekpunte van 'n vierhoek. R is 'n punt op die x - as. QR is verleng na N sodat $QR = 2RN$. SN is geteken. $\angle PTO = 71,57^\circ$ en $\angle SRN = \theta$.

Bepaal:

- 2.1 Die vergelyking van SR (1)
- 2.2 Die gradiënt van QP tot die naaste heelgetal. (2)
- 2.3 Die vergelyking van QP in die vorm $y = mx + c$ (2)
- 2.4 Die lengte van QR. Laat jou antwoord in wortelvorm. (2)
- 2.5 $\tan(90^\circ - \theta)$ (3)
- 2.6 Die oppervlakte van ΔRSN , sonder gebruik van 'n sakrekenaar. (6)

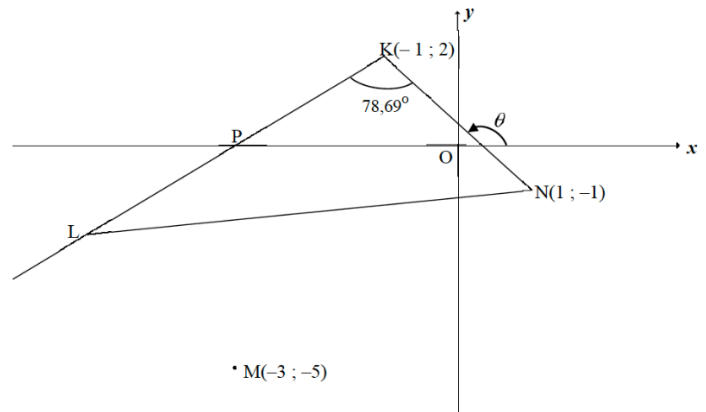


[16]

VRAAG 3

DBE NOV 2018

In die diagram is $K(-1; 2)$, L en $N(1; -1)$ hoekpunte van ΔKLN sodat $\angle LKN = 78,69^\circ$. KL sny die x -as by P . KL is verleng. Die inklinasie van KN is θ . Die koördinate van M is $(-3; -5)$.

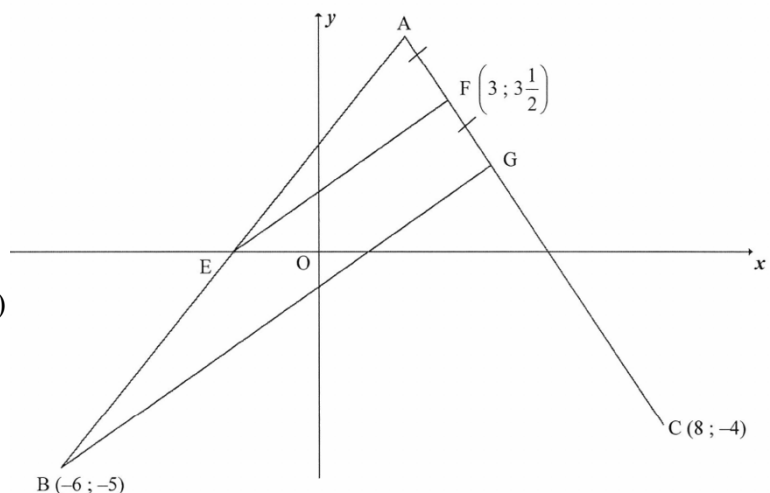


- 3.1 Bereken
 - 3.1.1 Die gradiënt van KN . (2)
 - 3.1.2 Die grootte van θ , die inklinasie van KN (2)
 - 3.2 Toon aan dat die gradiënt van KL gelyk is aan 1. (2)
 - 3.3 Bepaal die vergelyking van die reguitlyn KL in die vorm $y = mx + c$ (2)
 - 3.4 Bereken die lengte van KN . (2)
 - 3.5 Dit is verder gegee dat $KN = LM$
 - 3.5.1 Bereken die moontlike koördinate van L . (5)
 - 3.5.2 Bepaal die koördinate van L as dit gegee word dat $KLMN$ 'n parallellogram is. (3)
 - 3.6 T is 'n punt op KL verleng. TM is geteken sodat $TM = LM$. Bereken die oppervlakte van ΔKTN . (4)
- [22]**

VRAAG 4

DBE NOV 2017

In die diagram is A , $B(-6; -5)$ en $C(8; -4)$ punte in die Cartesiese vlak. $F(3; 3\frac{1}{2})$ en G is punte op die lyn AC sodat $AF = FG$. E is die x -afsnit van AB .

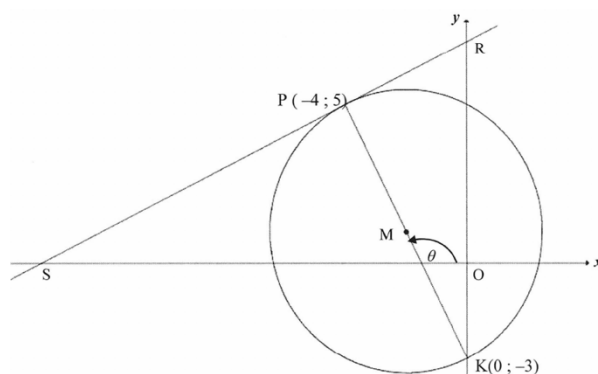


- 4.1 Bereken:
 - 4.1.1 Die vergelyking van AC , in die vorm $y = mx + c$. (4)
 - 4.1.2 Die koördinate van G as die vergelyking van BG $7x - 10y = 8$ is. (2)
 - 4.2 Toon deur berekening aan dat die koördinate van A $(2; 5)$ is. (2)
 - 4.3 Bewys dat $EF \parallel BG$. (4)
 - 4.4 $ABCD$ is 'n parallellogram met D in die eerste kwadrant. Bereken die koördinate van D . (4)
- [17]**

VRAAG 5

DBE NOV 2017

In die diagram is $P(-4; 5)$ en $K(0; -3)$ die eindpunte van die middellyn van die sirkel met middelpunt M . S en R is respektiewelik die x - en y -afsnitte van die raaklyn aan die sirkel by P . θ is die inklinasie van PK met die positiewe x -as.



5.1 Bepaal:

5.1.1 Die gradiënt van SR (4)

5.1.2 Die vergelyking van SR in die vorm $y = mx + c$ (3)

5.1.3 Die vergelyking van die sirkel in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (4)

5.1.4 Die grootte van $\angle PKR$ (3)

5.1.5 Die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by K in die vorm $y = mx + c$. (2)

5.2 Bepaal die waarde(s) van t sodat die lyn $y = \frac{1}{2}x + t$ die sirkel by twee verskillende punte sny. (3)

5.3 Bereken die oppervlakte van ΔSMK . (5) [23]

VRAAG 6

DBE NOV 2018

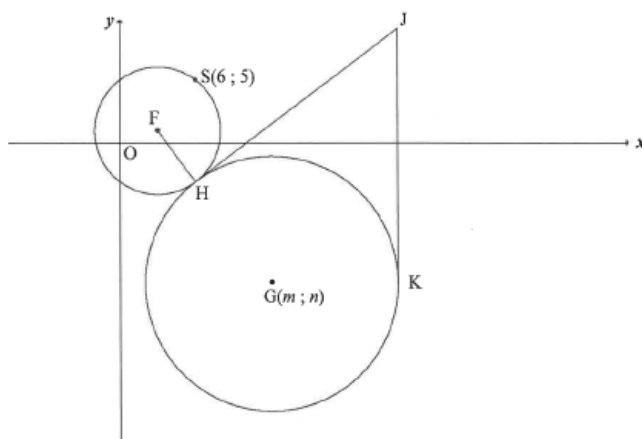
In die diagram is die vergelyking van die sirkel met middelpunt F

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = r^2.$$

$S(6; 5)$, is 'n punt op die sirkel met middelpunt F .

'n Ander sirkel met middelpunt $G(m; n)$

in die 4^{de} kwadrant, raak die sirkel met middelpunt F , by H sodat $FH : HG = 1 : 2$. Die punt J lê in die eerste kwadrant sodat HJ 'n gemene raaklyn aan beide sirkels is. JK is 'n raaklyn aan die groter sirkel by K .



6.1 Skryf neer die koördinate van F . (2)

6.2 Bereken die lengte van FS . (2)

6.3 Skryf neer die lengte van HG . (1)

6.4 Gee 'n rede hoekom $JH = JK$. (1)

6.5 Bepaal:

6.5.1 Die afstand FJ , met redes, as dit gegee word dat $JK = 20$. (4)

6.5.2 Die vergelyking van die sirkel met middelpunt G in terme van m en n in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (1)

6.5.3 Die koördinate van G , as dit verder gegee word dat die vergelyking van raaklyn JK $x = 22$ is. (7)

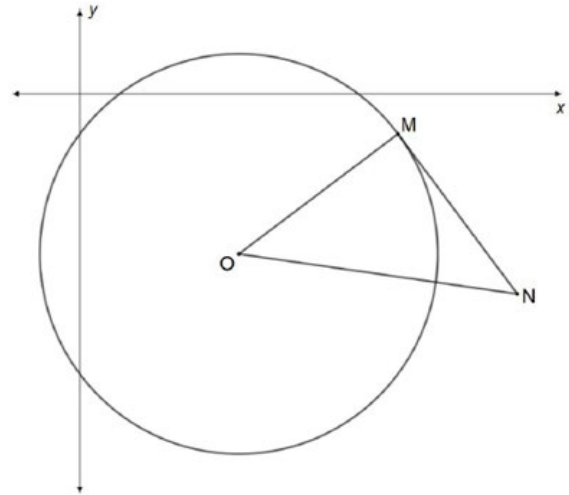
AFDELING B

VRAAG 1

In die diagram is die sirkel met middelpunt O geteken in die Cartesiese vlak.

- MN is 'n raaklyn aan die sirkel by M .
- N is 'n punt buite die sirkel met koördinate $N(11; -5)$

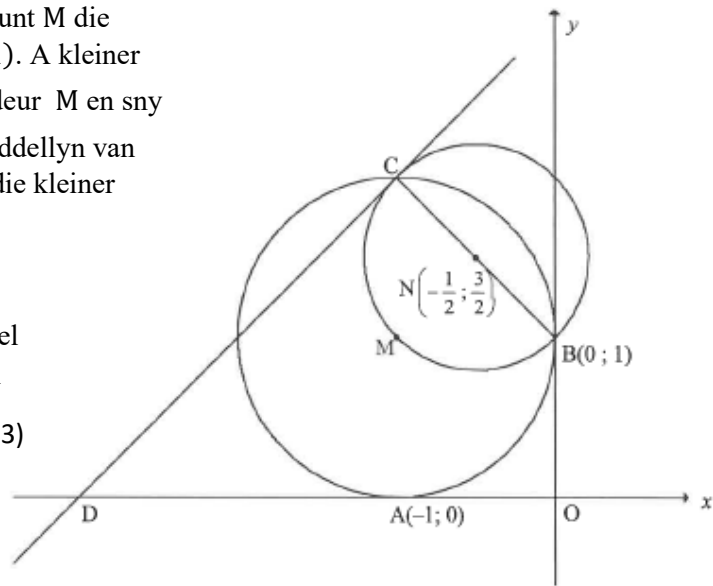
- 1.1 Skryf neer die grootte van $\angle OMN$. Gee 'n rede vir jou antwoord. (3)
- 1.2 As die vergelyking van die sirkel $x^2 - 8x + (y + 4)^2 = 9$ is, dan:
- 1.2.1 Bepaal die koördinate van O . (2)
- 1.2.2 Bepaal die lengte van OM . (2)
- 1.3. Bereken die lengte van MN . (4)



DBE NOV 2019(VRAAG 4)

In die diagram raak die sirkel met middelpunt M die x -as by $A(-1; 0)$ en die y -as by $B(0; 1)$. A kleiner sirkel, met middelpunt $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, gaan deur M en sny die groter sirkel by B en C . BNC is 'n middellyn van die kleiner sirkel. 'n Raaklyn getrek aan die kleiner sirkel by C sny die x -as by D .

- 2.1 Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt M in die vorm van $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ (3)



- 2.2 Bereken die koördinate van C . (2)
- 2.3 Toon aan dat die vergelyking van die raaklyn CD $y - x = 3$ is. (4)
- 2.4 Bepaal die waardes van t waarvoor die lyn $y = x + t$ NIE die kleiner sirkel sal raak of sny nie. (3)
- 2.5 Die kleiner sirkel met middelpunt N word getransformeer sodat punt C getransleer word al langs die raaklyn na D . Bereken die koördinate van E , die nuwe middelpunt van die kleiner sirkel. (3)
- 2.6 As dit is gegee word dat die oppervlakte van vierhoek $OBCD$ $2a^2$ vierkante eenhede is en $a > 0$, toon dat $a = \frac{\sqrt{7}}{2}$ eenhede. (5)

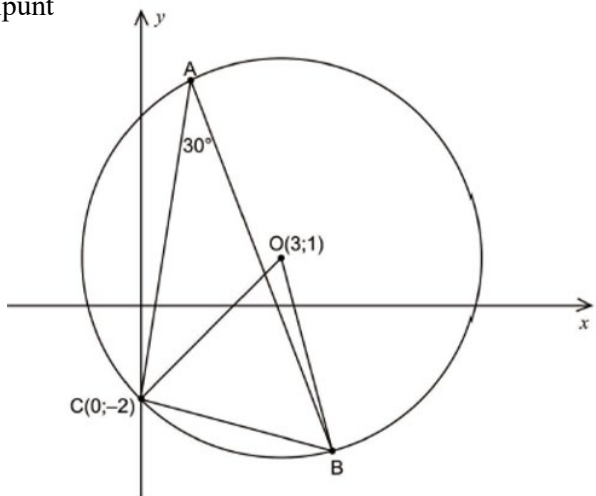
[20]

VRAAG 3

IEB NOV 2017 (VRAAG 8)

In die Cartesiese vlak hieronder, is 'n sirkel met middelpunt by $O(3; 1)$

- A en $C(0; -2)$ is vaste punte op die sirkel.
- $\angle CAB = 30^\circ$.
- B is a veranderlike punt op die sirkel.



- 3.1 3.1.1 Bepaal die lengte van OC . (3)
- 3.1.2 BC beweeg al langs die sirkel totdat BC parallel is aan die x – as. Skryf neer die nuwe koördinate van B. (4)
- 3.1.3 Bereken die grootte van $\angle CAB$ vir hierdie nuwe posisie van B. Gee alle redes. (4)
- 3.2 B beweeg vanaf sy oorspronklike posisie al langs die sirkel in 'n antikloksgewyse rigting totdat di met e oppervlakte $\Delta OBC = \frac{9}{2}$ vierkante eenhede. (6)
- Vind die kortste afstand wat B langs die sirkel moet beweeg vir bogenoemde om te gebeur. [17]

VRAAG 4

IEB NOV 2017 (VRAAG 4)

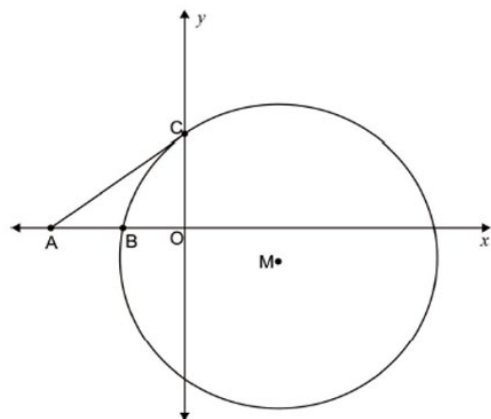
In die Cartesiese vlak hieronder is 'n sirkel met middelpunt M geteken.

- A is 'n punt op die x – as.
- Punt B lê op die sirkel en die x – as.
- Punt C lê op die sirkel en die y – as.

Die vergelyking van die sirkel is

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

Die lyn AC is 'n raaklyn aan die sirkel by C.

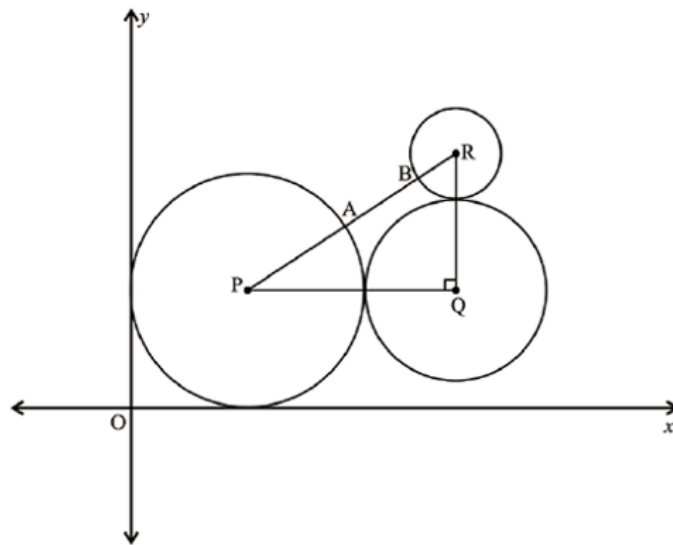


- 4.1 Skryf neer die koördinate van M. (1)
- 4.2 Bepaal die koördinate van punt C (3)
- 4.3 Bepaal die vergelyking van die raaklyn AC . (3)
- 4.4 Bepaal die lengte van AB . Laat jou antwoord korrek tot een desimale plek. (4)
- [11]

VRAAG 5**IEB NOV 2016 (VRAAG 3)**

In die diagram hieronder:

- Sirkel P raak die x -as en die y -as.
 - Sirkel P raak sirkel Q by een punt.
 - Sirkel Q raak sirkel R by een punt.
 - Sirkel P het 'n radius van 5 eenhede.
 - PQ is parallel aan die x -as en RQ is parallel aan die y -as
- PR sny die sirkels met middelpunte P en R by A en B respektiewelik.



- 5.1 As $PQ = 9$ eenhede, bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt Q. (4)
- 5.2 Vind die lengte van lyn QR as die vergelyking van die sirkel met middelpunt R $(x - p)^2 + y^2 - 22y = -117$ is. (3)
- 5.3 Bepaal die lengte van AB , korrek tot twee desimale plekke. (4)

[11]

INVERSE FUNKSIES

OPSOMMING:



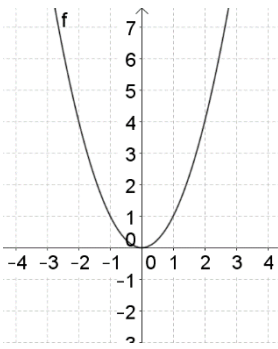
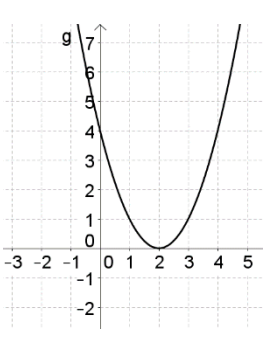
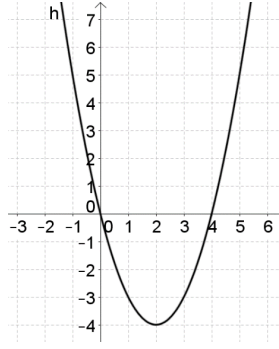
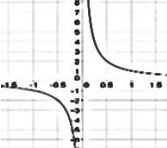
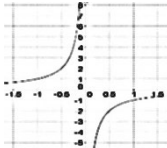
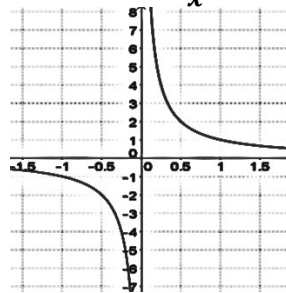
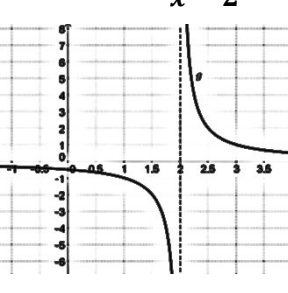
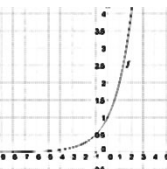
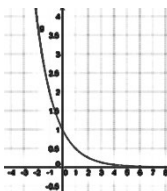
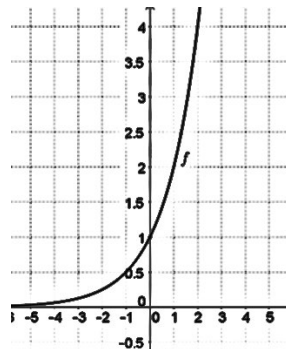
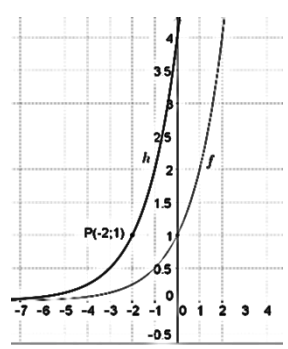
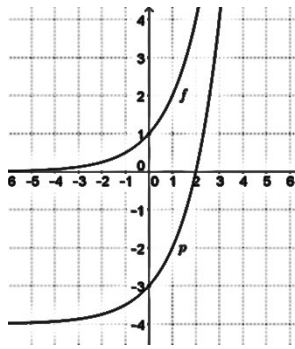
1. KABV UITTREKSEL UIT GRAAD 10-12

Graad 10	Graad 11	Graad 12
<p>1. Die konsep van 'n funksie, waar 'n sekere hoeveelheid (uitsetwaarde) uniek afhanklik is van 'n ander hoeveelheid (insetwaarde). Werk met verwantskappe tussen veranderlikes deur van tabelle, grafieke, woorde en formules gebruik te maak. Herlei gemaklik tussen hierdie voorstellings.</p> <p>Let wel: die grafiek gedefinieer deur $y = x$ moet bekend wees vanaf graad 9.</p> <p>2. Punt-vir-punt-stipping van basiese grafieke gedefinieer deur $y = x^2$, en $y = \frac{1}{x}$, en $y = b^x$; $b > 0$ en $b \neq 1$ om vorm, gebied (insetwaardes), terrein (uitsetwaardes), asimptote, simmetrie-asse, draaipunte en afsnitte op die asse (waar van toepassing) te ontdek.</p> <p>3. Ondersoek die invloed van a en q op die grafieke gedefinieer deur $y = a \cdot f(x) + q$</p> <p>waar $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$ en $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$.</p>	<p>1. Hersien werk oor die invloed van die parameters a en q en ondersoek die invloed van p op die grafieke van die funksies gedefinieer deur:</p> <p>1.1. $y = f(x) = a(x + p)^2 + q$</p> <p>1.2. $y = f(x) = \frac{a}{x + p} + q$</p> <p>1.3. $y = f(x) = ab^{x+p} + q$ waar $b > 0$, $b \neq 1$</p> <p>2. Ondersoek numeries die gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kurwe en ontwikkel 'n intuitiewe begrip van die konsep van die helling van 'n kromme by 'n punt.</p>	<p>1. Definisie van 'n funksie.</p> <p>2. Algemene konsep van die inverse van 'n funksie en hoe dit nodig mag wees om die gebied van die funksie te beperk (om 'n een-tot-een funksie te kry) om te verseker dat die inverse 'n funksie is.</p> <p>3. Bepaal en skets die grafieke van die inverses van die funksies gedefinieer deur $y = ax + q$; $y = ax^2$ $y = b^x$; ($b > 0$, $b \neq 1$)</p> <p>Fokus op die volgende eienskappe: Die gebied en die terrein, afsnitte met die asse, draaipunte, minimum en maksimum, waarders, asimptote (horisontale en vertikale), vorm en simmetrie, gemiddelde gradiënt (gemiddelde tempo van verandering), intervale waarop die funksie toeneem/afneem.</p>

2. TERMINOLOGIE:

- Die **definisieversameling** is die versameling van alle moontlike x –waardes wat die **funksie** "laat werk" en werklike y –waardes lewer.
- Die **waardeversameling** van 'n funksie is die moontlike waardes van y .
- 'n **Funksie** is 'n verhouding waarin elke insetwaarde (x –waarde) slegs een uitsetwaarde (y –waarde) het.
- **Die vertikale lyn-toets** kan gebruik word om te bepaal of 'n relasie 'n funksie is of nie. As die vertikale lyn die grafiek slegs op een punt sny, stel die grafiek 'n funksie voor; as dit op meer as een punt sny, stel die grafiek geen funksie voor nie.
- **Funksionele notasie:** die $f(x)$ –notasie is 'n ander manier om die y –waarde in 'n funksie voor te stel, $y = f(x)$.
- Die **inverse** van 'n **funksie** word verkry deur die grafiek f om die lyn $y = x$ te reflekteer. Die inverse van f word geskryf as f^{-1} .
Om die inverse van 'n funksie te vind, ruil die $x =$ en die y –waardes om, en maak weer y die onderwerp van die formule.

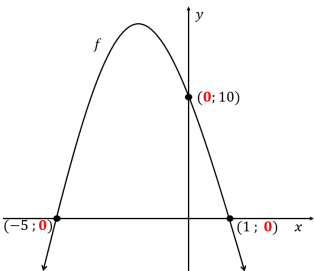
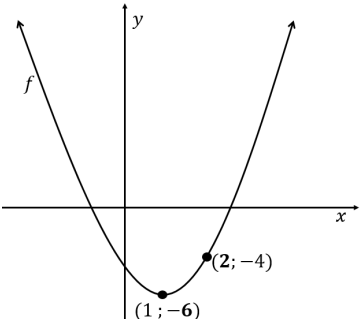
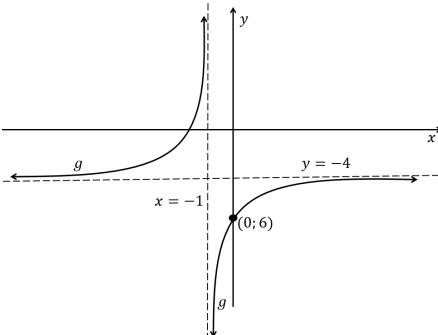
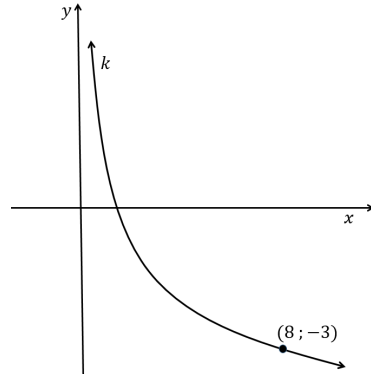
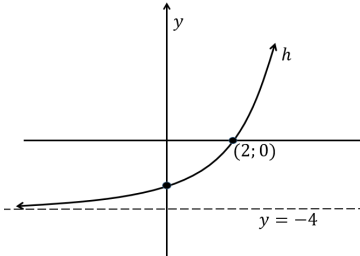
3. DIE MOEDERFUNKSIE EN DIE INVLOED VAN PARAMETERS

	Invloed van	Moederfunksie	Invloed van p en q	
PARABOOL	$a > 0$  $a < 0$ 	$f(x) = x^2$ 	$g(x) = (x - 2)^2$  Skuif 2 eenhede regs ($p < 0$)	$h(x) = (x - 2)^2 - 4$  Skuif 4 eenhede af ($q < 0$)
	HIPERBOOL	$a > 0$ 1 ^{ste} en 3 ^{de} kwadrant  $a < 0$ 2 ^{de} en 4 ^{de} kwadrant 	$f(x) = \frac{1}{x}$ 	$g(x) = \frac{1}{x - 2}$  Skuif 2 eenhede regs ($p < 0$)
EXPONENSIËLE GRAFIEK $a > 0$ Bo $x - as$ $a > 0$ onder $x - as$	$b > 1$ Stygend  $0 < b < 1$ dalend 	$f(x) = 2^x$ 	$h(x) = 2^{x+2}$  Skuif 2 eenhede links ($p > 0$)	$p(x) = 2^x - 4$  Skuif 4 eenhede af ($q < 0$)

4. SKETS VAN GRAFIEKE

	Parabool	Hiperbool	Eksponensiële grafiek	Logaritmiese grafiek
Standaard vorm	$y = ax^2 + bx + c$ $y = a(x + p)^2 + q$ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$y = \frac{a}{x + p} + q$	$y = a \cdot b^{x+p} + q$	$y = \log_a x$
Om die grafieke te skets, benodig jy: y - afsnit (x = 0) x - afsnit (y = 0)	Voorbeeld 1 Skets $f(x) = -2x^2 - 8x + 10$ OF $f(x) = -2(x + 2)^2 + 18$	Voorbeeld 2 Skets $g(x) = \frac{-2}{x+1} - 4$	Voorbeeld 3 Skets $h(x) = 2^x - 4$	Voorbeeld 4 Skets $k(x) = \log_2 x$
Draaipunt $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ OF $(-p; q)$				
Asimptoot(e) • $x = -p$ • $y = q$				
Definisie-versameling	$x \in R$	$x \in R; x \neq -1$	$x \in R$	$x \in R; x > 0$
Waardeversameling	$y \in R; y \leq 18$	$y \in R; y \neq -4$	$y \in R; y > -4$	$y \in R$
Simmetrie-as	$x = -\frac{b}{2a}$ $x = -2$	$y = x + c$ Stel in $(-p; q) \rightarrow (-1; -4)$ $\therefore -4 = -1 + c$ $c = -3$ $y = x - 3$ OF $y = x - + c$ Stel in $(-p; q) \rightarrow (-1; -4)$ $\therefore -4 = -(-1) + c$ $c = -5$ $y = -x - 5$		

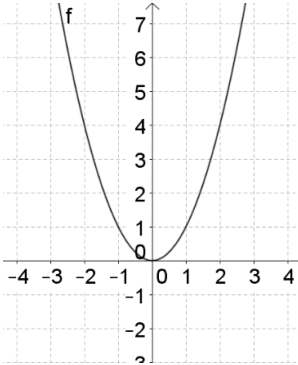
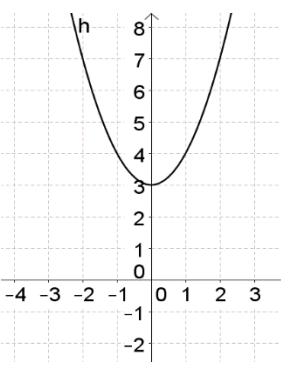
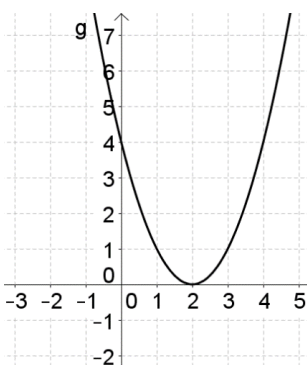
5. OM DIE VERGELYKING VAN 'N GRAFIEK TE BEPAAL

Parabool	Hiperbool	Eksponensiële grafiek	Logaritmiese grafiek
$y = ax^2 + bx + c$ $y = a(x + p)^2 + q$ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$y = \frac{a}{x + p} + q$	$y = a \cdot b^{x+p} + q$	$y = \log_a x$
x - afsnitte gegee: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$	Draaipunt gegee: $y = a(x + p)^2 + q$	Vir p en q: Begin deur die asimptote in die vergelyking te vervang.	Vir a: Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in
Vir a: Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in.	Vir a: Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in.	Vir a: Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in	Vir enige ander: Stel 'n punt op die grafiek in die vergelyking in
			
$y = a(x + 5)(x - 1)$ Stel in: (0; 10) $10 = a(0 + 5)(0 - 1)$ $10 = -5a$ $a = -2$ $y = -2(x + 5)(x - 1)$ $y = -2x^2 - 8x + 10$	$y = a(x - 1)^2 - 6$ Stel in: (2; -4): $-4 = a(2 - 1)^2 - 6$ $2 = a(1)^2$ $a = 2$ $y = 2(x - 1)^2 - 6$ OF $y = 2x^2 - 4x - 4$	Vir hierdie voorbeeld is gegee: $y = a^x + q$	
		$y = \frac{a}{x + 1} - 4$ Stel in: (0; -6) $-6 = \frac{a}{0 + 1} - 4$ $-2 = a$ $y = \frac{-2}{x + 1} - 4$	$y = a^x - 4$ Stel in: (2; 0): $0 = a^2 - 4$ $a^2 = 4$ $a = 2$ $y = 2^x - 4$
			$y = \log_a x$ Stel in: (8; -3) $-3 = \log_a 8$ Skryf in eksponensiële vorm: $a^{-3} = 8$ $a = \frac{1}{2}$ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

6. TRANSFORMASIES

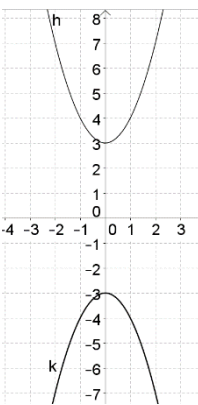
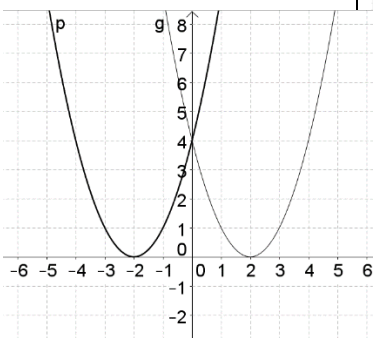
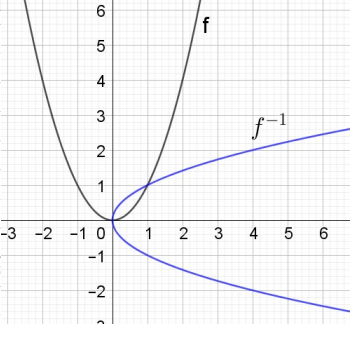
6.1 TRANSLASIE

- $p > 0$ horisontale skuif na links
- $p < 0$ horisontale skuif na regs
- $q > 0$ vertikale skuif op
- $q < 0$ vertikale skuif af

VOORBEELD:		Transleer 3 eenhede op.	Transleer 2 eenhede regs.
PARABOOL	$f(x) = x^2$	Notasie: $f(x) + 3$ $h(x) = x^2 + 3$	Notasie: $f(x - 2)$ $g(x) = (x - 2)^2$
			

6.2 REFLEKSIE:

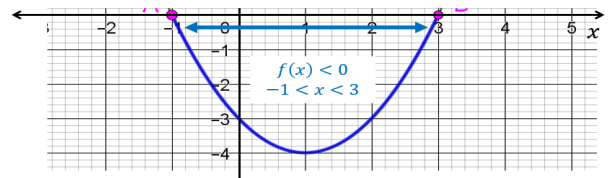
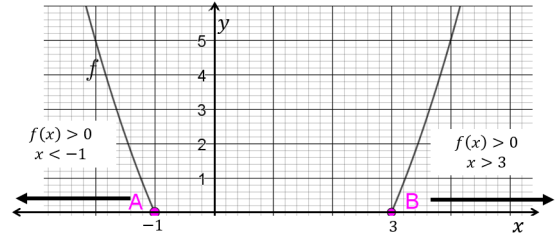
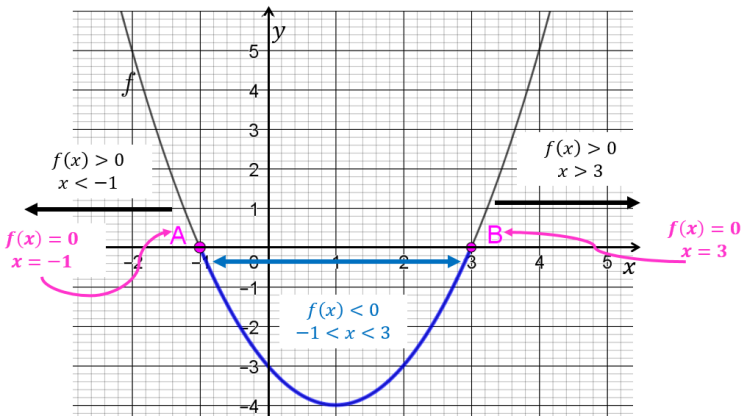
- REFLEKSIE in die $(x - as)$ OF in die lyn $y = 0$ **Notasie:** $f(x) \rightarrow -f(x)$
- REFLEKSIE in die $(y - as)$ OF in die lyn $x = 0$ **Notasie:** $f(x) \rightarrow f(-x)$
- REFLEKSIE in die lyn $y = x$ **Notasie:** $f(x) \rightarrow f^{-1}(x)$

VOORBEELD:	$h(x) = x^2 + 3$ $\rightarrow k(x) = -x^2 - 3$	$g(x) = (x - 2)^2$ $\rightarrow p(x) = (-x - 2)^2$	$f: y = x^2$ $f^{-1}: x = y^2$ $\therefore y = \pm\sqrt{x}$
PARABOOL			
EKSPONENSIELE FUNKSIE	$f(x) = 2^x + 3$ $\rightarrow -f(x) = -(2^x) - 3$	$f(x) = 2^x - 2$ $\rightarrow f(-x) = 2^{-x} - 2$	$f(x) = 2^x$ $\rightarrow f^{-1}(x) = \log_2 x$

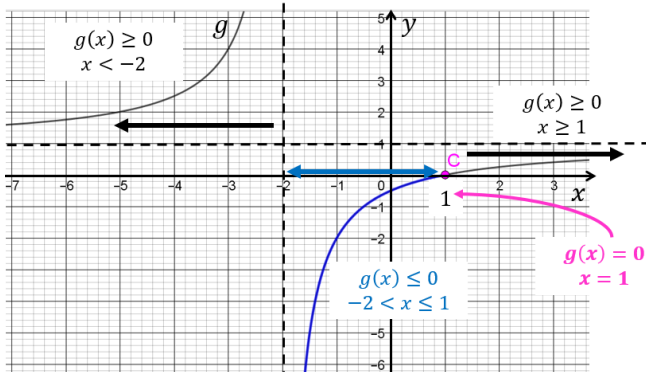
7. GRAFIEKE EN ONGELYKHEDE:

VOORBEELDE:

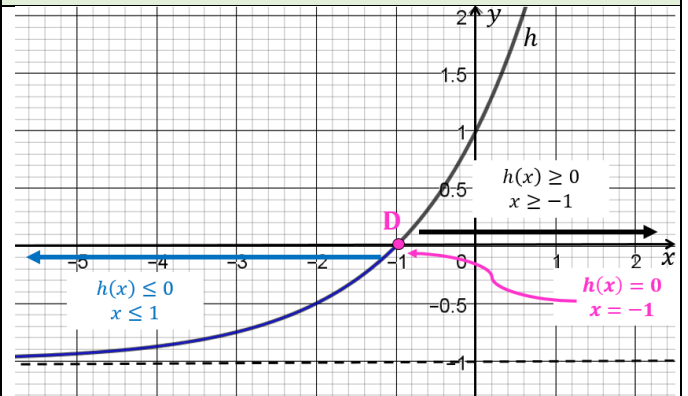
PARABOOL



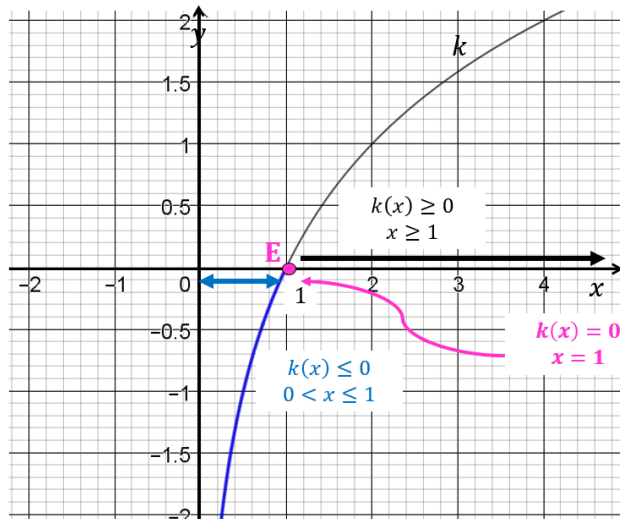
HIPERBOOL



EKSPONENSIELE FUNKSIE



LOGARITMIESE FUNKSIE



8. INVERSE FUNKSIES

8.1 REGUITLYN

Voorbeeld 1: Gegee: $f(x) = 2x - 4$

1.1 Bepaal f^{-1} , die inverse van f .

1.2 Skets die grafieke f , f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

1.1 So as, $f(x) = 2x - 4$

$$f: y = 2x - 4$$

$$f^{-1}: x = 2y - 4 \quad (\text{ruil } x \text{ en } y \text{ om})$$

$$\therefore -2y = -x - 4$$

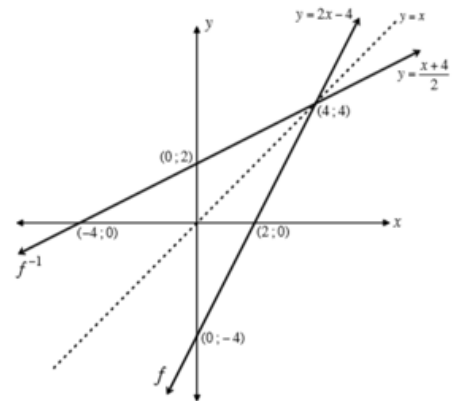
$$\therefore 2y = x + 4$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 2$$

Ons sê dan, die inverse funksie van f is:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

1.2



8.2 PARABOOL

Voorbeeld 2: Gegee: $f(x) = 2x^2$

2.1 Bepaal f^{-1} , die inverse van f .

2.2 Skets die grafieke f , f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

2.1

So as, $f(x) = x^2$

$$f: y = x^2$$

$$f^{-1}: x = y^2 \quad (\text{ruil } x \text{ en } y \text{ om})$$

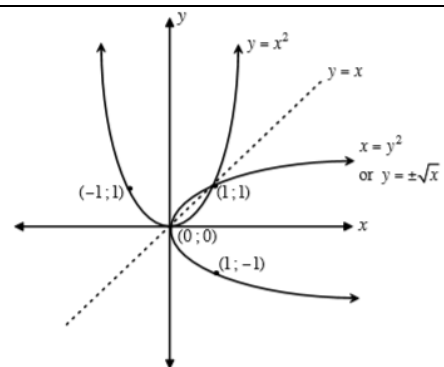
$$\therefore y^2 = x$$

$$\therefore y = \pm\sqrt{x}$$

Ons sê dan, die inverse funksie van f is:

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$$

2.2



Voorbeeld 3: (Parabool met beperking in definisie versameling).

Given: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$; $x \leq 0$

3.1 Bepaal f^{-1} , die inverse van f .

3.2 Skets die grafieke f , f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

Oplossing:

3.1

So as, $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ $x \leq 0$

$$f: y = -\frac{1}{2}x^2$$

- ruil x en y om

$$f^{-1}: x = -\frac{1}{2}y^2 \quad y \leq 0$$

$$\therefore y^2 = -2x$$

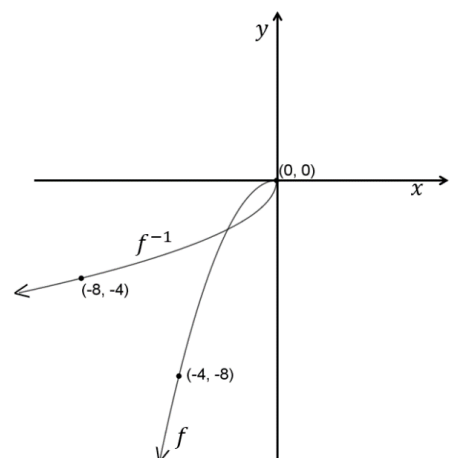
$$\therefore y = -\sqrt{-2x}$$

Ons sê dan, die inverse funksie van f is:

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{-2x}$$

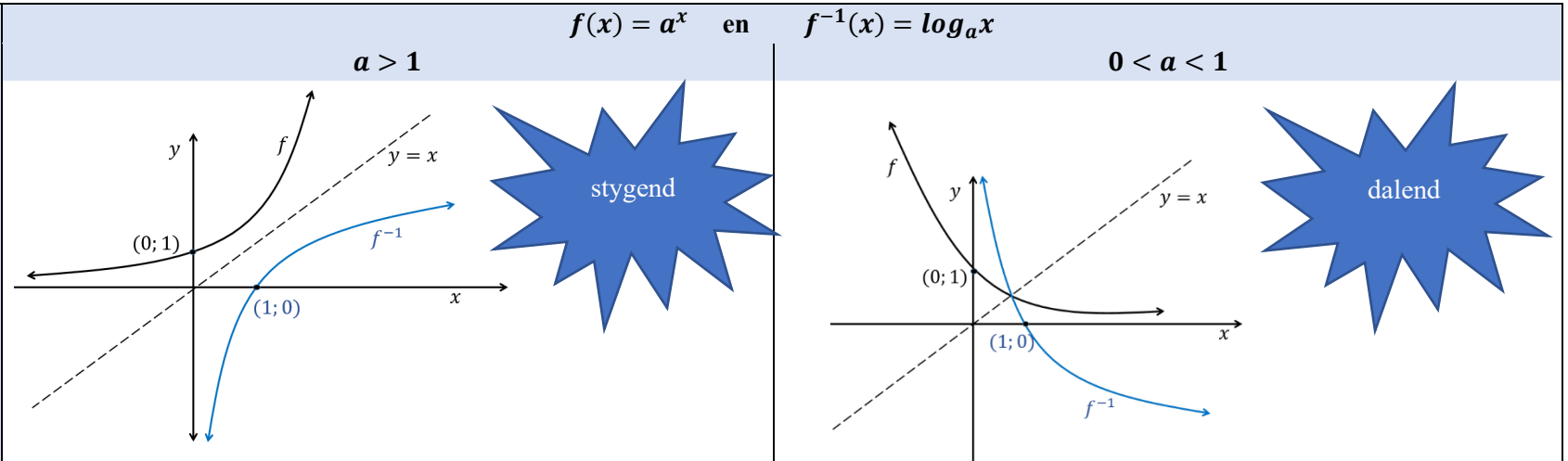
Kies slegs
negatiewe y

3.2



**8.3
EKSPONENSIELE
EN
LOGARITMIESE
FUNKSIE**

Die inverse van die eksponensiële funksie $f(x) = a^x$ ($a > 0; a \neq 1$) is die logaritmiëse funksie $f^{-1}(x) = \log_a x$.



Nota:

- Die eksponensiële grafiek f is 'n **toenemende funksie** ($a > 1$)
- Die logaritmiëse grafiek f^{-1} is 'n **toenemende funksie** ($a > 1$)

Note:

- Die eksponensiële grafiek f is 'n **dalende funksie** ($0 < a < 1$)
- Die logaritmiëse grafiek f^{-1} is 'n **dalende funksie** ($0 < a < 1$)

Definisie (D) – en Waardeversameling (W):

f	$D: x \in R$	$W: y > 0$
f^{-1}	$W: y \in R$	$D: x > 0$

Inverse funksies:

Grafiek f^{-1} word verkry deur die grafiek f in die lyn $y = x$ te reflekteer. (die inverse van f)

- As $y = a^x$ dan word die inverse funksie gegee deur $x = a^y$ wat ook geskryf kan word as $y = \log_a x$
- As $y = \log_a x$ dan word die inverse funksie gegee deur $x = \log_a y$ wat ook geskryf kan word as $y = a^x$

Asimptote:

- Die eksponensiële grafiek f het 'n **asimptoot** $y = 0$ (x – **axis**)
- Die logaritmiëse grafiek f^{-1} het 'n **asimptoot** $x = 0$ (y – **axis**)

AFDELING A – Gr 12 FUNSIES EN INVERSESES

(Roetine vrae)

- Let daarop dat sommige van die vrae in hierdie afdeling geneem, is uit MIND THE GAP.

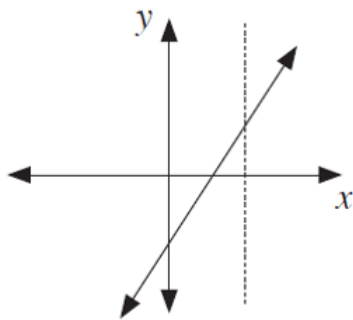
VRAAG 1

1.1

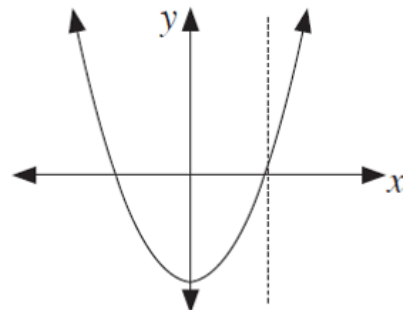
- 'n Funksie is 'n relasie tussen x en y , waar daar vir elke x –waarde slegs een y –waarde is.
- Om te besluit of 'n grafiek 'n funksie voorstel of nie, kan ons gebruik maak van die vertikale lyn-toets.

Sê of die volgende grafieke funksies is of nie.

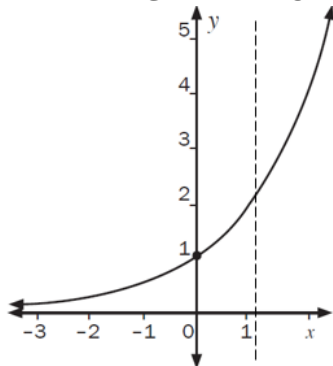
GRAFIEK A



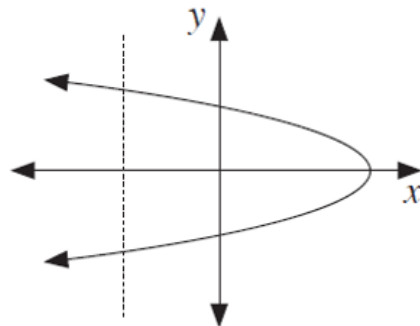
GRAFIEK B



GRAFIEK C



GRAFIEK D



1.2

Voltooi die volgende sinne:

- 'n Funksie moet langs die lyn _____ gereflekteer word om die inverse van die funksie te vorm.
- Die notasie vir die inverse van 'n funksie f word geskryf as _____

VRAAG 2

Gegee: $f(x) = 2x + 6$.

- 2.1 Bepaal $f^{-1}(x)$.
- 2.2 Skets die grafieke f, f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
Dui die afsnitte met die asse duidelik aan vir elk van die grafieke f en f^{-1} .
- 2.3 Bepaal die definisie- en waardeversameling van f en f^{-1} .

VRAAG 3

- 3.1 Skets $f(x) = 2x^2$
Dui die afsnitte met die asse asook die koördinate van een ander punt op die grafiek van f duidelik aan.
- 3.2 Bepaal die inverse van $f(x)$.
- 3.3 Skets die grafieke f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
Dui die afsnitte met die asse asook die koördinate van een ander punt op die grafiek van f^{-1} duidelik aan.
- 3.4 Bepaal die definisie- en waardeversameling van f en f^{-1} .

VRAAG 4

Gegee: $f(x) = -3x^2$

- 4.1 Bepaal die inverse van $f(x)$ in die vorm $y = \dots\dots\dots$
- 4.2 Bepaal die definisie- en waardeversameling van f en f^{-1} .

VRAAG 5

Gegee: $f(x) = 2^x$

- 5.1 Bepaal $f^{-1}(x)$ in die vorm $y = \dots\dots\dots$
- 5.2 Skets die grafieke f, f^{-1} en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
Dui die afsnitte met die asse asook die koördinate van een ander punt op die grafieke van f en f^{-1} duidelik aan.
- 5.3 Bepaal die definisie- en waardeversameling van f en f^{-1} .

AFDELING B– Gr 12 FUNSIES EN INVERSESE

(Komplekse vrae)

- Let daarop dat die vrae in hierdie afdeling uit vorige vraestelle geneem is. (Die jaar waarin die vraag gevra is, word tussen hakies langs die vraag aangedui.)

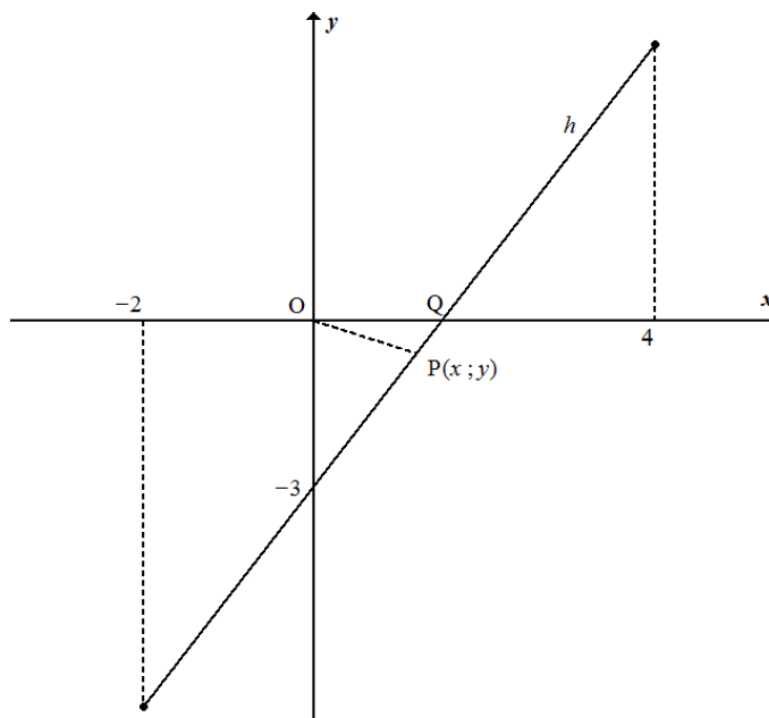
VRAAG 1 (Maart 2016 – VRAAG 6)

Gegee: $f(x) = \frac{1}{4}x^2, x \leq 0$

- 1.1 Bepaal die vergelyking f^{-1} in die vorm $f^{-1}(x) = \dots\dots\dots$
- 1.2 Skets die grafieke f en f^{-1} op dieselfde assestelsel. Dui duidelik die afsnitte met die asse aan, sowel as die koördinate van een ander punt op elk van die grafieke f en f^{-1} .
- 1.3 Is f^{-1} 'n funksie? Gee 'n rede vir jou antwoord.

VRAAG 2 (Nov 2015 – VRAAG 5)

Gegee: $h(x) = 2x - 3$ vir $-2 \leq x \leq 4$. Die x -afsnit van h is Q.



- 2.1 Bepaal die koördinate van Q.
- 2.2 Skryf die definisieversameling van h^{-1} neer.
- 2.3 Skets die grafiek h^{-1} , toon die y -afsnit en die koördinate van die eindpunte duidelik aan.
- 2.4 Vir watter waarde(s) van x is $h(x) = h^{-1}(x)$?

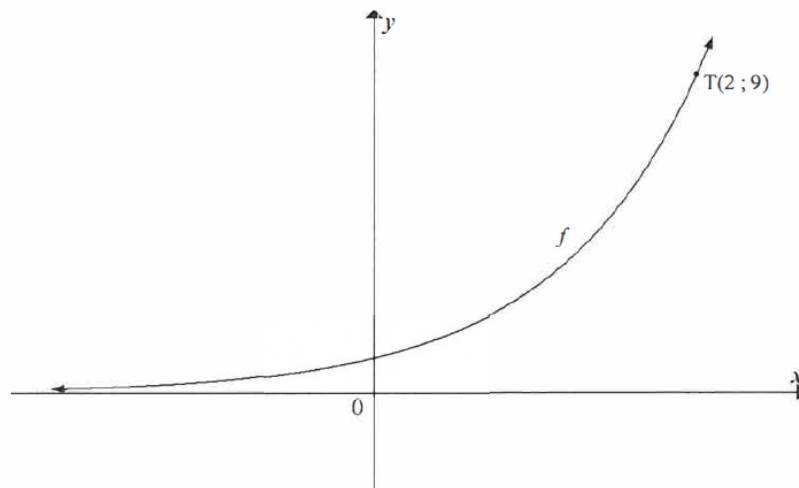
VRAAG 3 (DBE 2015 – VRAAG 5)

Gegee: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

- 3.1 Bepaal die waarde van $f(-2)$.
- 3.2 Skryf die vergelyking van $f^{-1}(x)$ neer in die vorm $y = \dots\dots\dots$
- 3.3 Andrew het geen idee hoe om die grafiek van f^{-1} te skets nie. Verduidelik vir Andrew hoe hy die grafiek van f kan gebruik om die grafiek van f^{-1} te skets.
- 3.4 Vervolgens, of andersins, skets die grafiek van f^{-1} . Dui ALLE afsnitte met die asse duidelik aan.
- 3.5 Skryf die definisieversameling van f^{-1} neer.
- 3.6 Vir watter waarde(s) van x is $f^{-1}(x) \geq -2$?
- 3.7 Gegee $q = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$
- 3.7.1 Bepaal die waarde van q .
- 3.7.2 Vervolgens, of andersins, bepaal die die koördinate van snypunt van f en f^{-1} .

VRAAG 4 (Maart 2015-VRAAG 5)

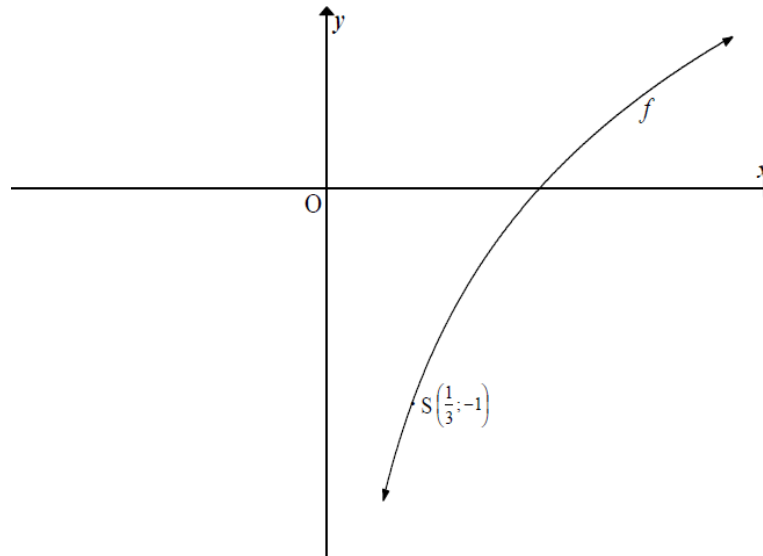
Die grafiek van $f(x) = a^x$, $a > 1$ word op die skets hieronder aangetoon. T (2 ; 9) lê op f .



- 4.1 Bereken die waarde van a .
- 4.2 Bepaal die vergelyking van $g(x)$ indien $g(x) = f(-x)$.
- 4.3 Bepaal die waarde(s) van x waarvoor $f^{-1}(x) \geq 2$.
- 4.4 Is die inverse van f 'n funksie? Verduidelik jou antwoord.

VRAAG 5 (Nov 2014–VRAAG 5)

Gegee: $f(x) = \log_a x$ waar $a > 0$. S $(\frac{1}{3}; -1)$ is 'n punt op die grafiek van f .



- 5.1 Bewys dat $a = 3$.
- 5.2 Skryf die vergelyking neer van h , die inverse van f , in die vorm $y = \dots\dots\dots$
- 5.3 Indien $g(x) = -f(x)$, bepaal die vergelyking van g .
- 5.4 Skryf die definisieversameling van g neer.
- 5.5 Bepaal die waarde(s) van x waarvoor $f(x) \geq -3$.

VRAAG 6 (DBE 2014–VRAAG 6)

Die grafiek van g word gedefinieer deur die vergelyking $g(x) = \sqrt{ax}$.

Die punt $(8; 4)$ lê op g .

- 6.1 Bereken die waarde van a .
- 6.2 Indien $g(x) > 0$, vir watter waardes van x sal g gedefinieerd wees?
- 6.3 Bepaal die waardeversameling van g .
- 6.4 Skryf die vergelyking van g^{-1} , die inverse van g , in die vorm $y = \dots\dots\dots$ neer.
- 6.5 As $h(x) = x - 4$, bepaal ALGEBRAÏES die koördinate van die snypunt(e) van h en g .
- 6.6 Bepaal vervolgens, of andersins, die waarde(s) van x waarvoor $g(x) > h(x)$.

AFDELING C – GR 11 FUNKISIES

(Vanaf vorige eksamen vraestelle)

NOTA:

- Vrae vir hierdie oefening is saamgestel uit die vorige Nasionale eksamen vraestelle vir GR 11 en GR 12.
- Sommige vrae is aangepas.

VRAAG 1 (GR11 DBE NOV 2017)

Gegee $f(x) = \frac{-3}{x+2} + 1$ en $g(x) = 2^{-x} - 4$

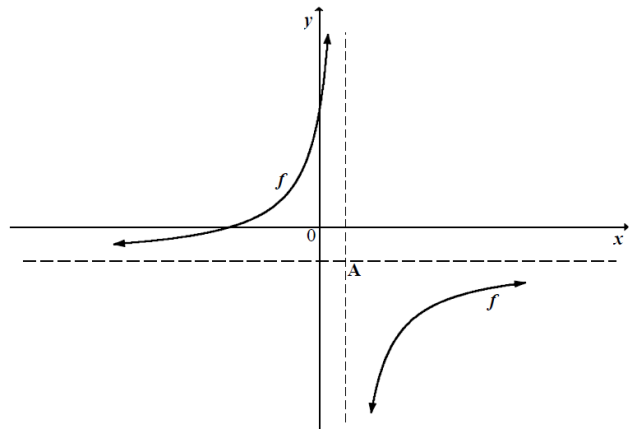
- 1.1 Bepaal $f(-3)$.
- 1.2 Bepaal x as $g(x) = 4$.
- 1.3 Skryf die asimptote van f neer.
- 1.4 Skryf die waardeversameling van g neer.
- 1.5 Bepaal die koördinate van die x -en y -afsnitte van f .
- 1.6 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van f met 'n negatiewe gradiënt. Los u antwoord in die vorm $y = mx + c$.
- 1.7 Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsel. Toon duidelik ALLE afsnitte met die asse en asimptote.

VRAAG 2 (GR11 DBE NOV 2015)

Die onderstaande skets stel die grafieke voor van

$$f(x) = \frac{-9}{x-1} - 2$$

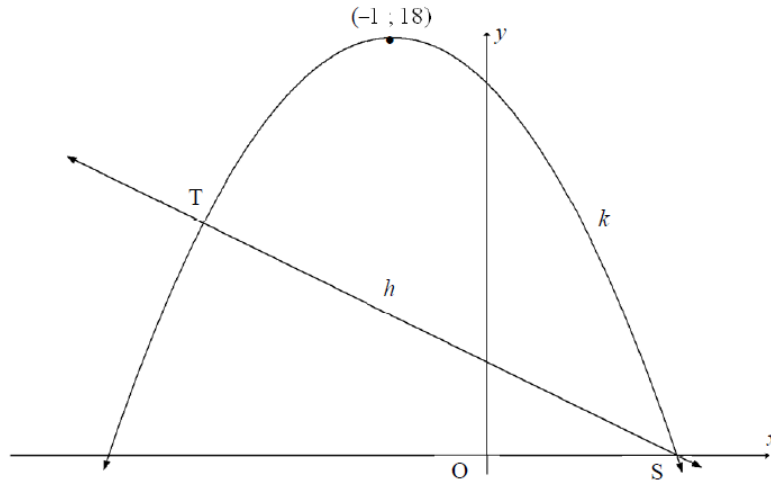
A is die snypunt van die asimptote van f .



- 2.1 Skryf die koördinate van A neer.
- 2.2 Gee die definisieversameling van f .
- 2.3 Gee die vergelyking van die horisontale asimptoot vir $f(x) - 1$.
- 2.4 Bepaal die koördinate van die x -en y -afsnitte van f .
- 2.5 Skryf die vergelyking van die simmetrie-as van f neer wat 'n negatiewe gradiënt het.
- 2.6 Vir watter waardes van x is $f(x) \geq 0$?

VRAAG 3 (GR 12 DBE 2019 Vraag 5)

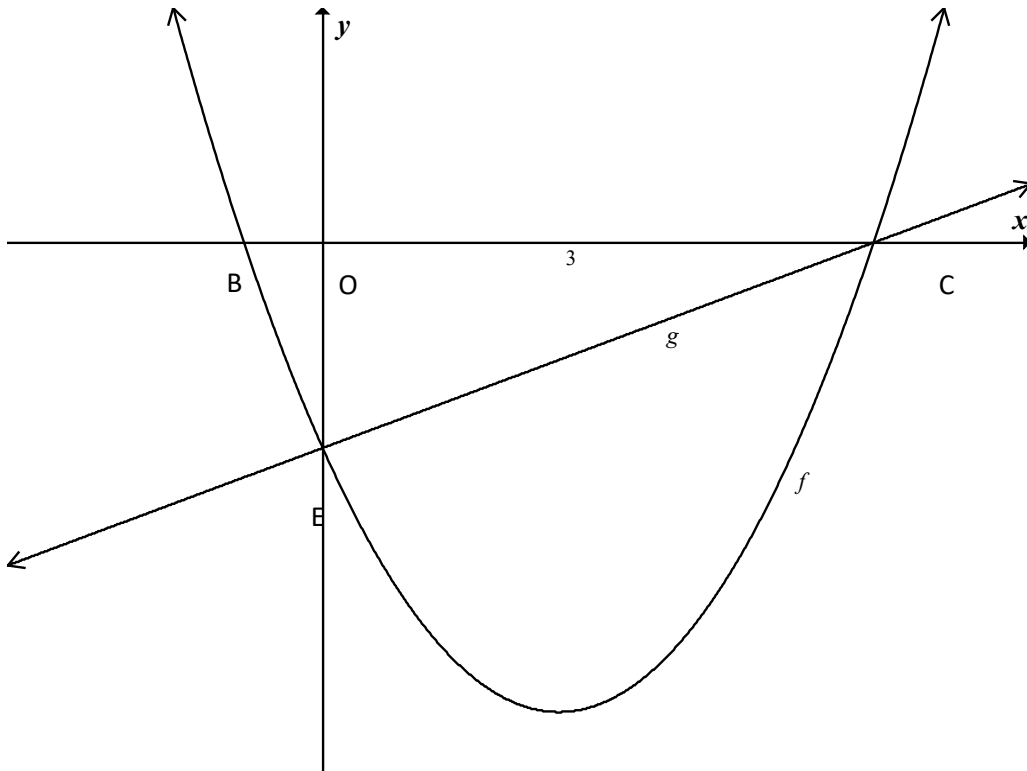
Die grafieke van $k(x) = ax^2 + bx + c$ en $h(x) = -2x + 4$ is hieronder geskets. Grafiek k het 'n draai punt by $(-1; 18)$. S is die x -afsnit van h en k . Grafieke h en k sny mekaar ook by T.



- 3.1 Bereken die koördinate van S.
- 3.2 Bepaal die vergelyking van k in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$
- 3.3 Indien $k(x) = -2x^2 - 4x + 16$, bepaal die koördinate van T.
- 3.4 Bepaal die waarde(s) van x waarvoor $k(x) < h(x)$
- 3.5 Daar word verder gegee dat k die grafiek van $g'(x)$ is.
 - (a) Vir watter waardes van x sal die grafiek van g konkaaf op wees?
 - (b) Skets die grafiek van g , en dui die x -waardes van die draaipunte en die buigpunt duidelik aan.
- 3.6 Bepaal die waardes van k sodat $f(x) = k$ gelyke wortels sal hê.
- 3.7 Bepaal die vergelyking h , as h die grafiek is nadat f TWEE eenhede na regs en EEN eenheid opwaarts geskuif het, in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

VRAAG 4 (NSC Maart 2011)

'n Parabool f sny die x -as by B en C en die y -as by E. Die simmetrie-as van die parabool het 'n vergelyking $x = 3$. Die vergelyking van die lyn deur E en C word gegee as $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$.

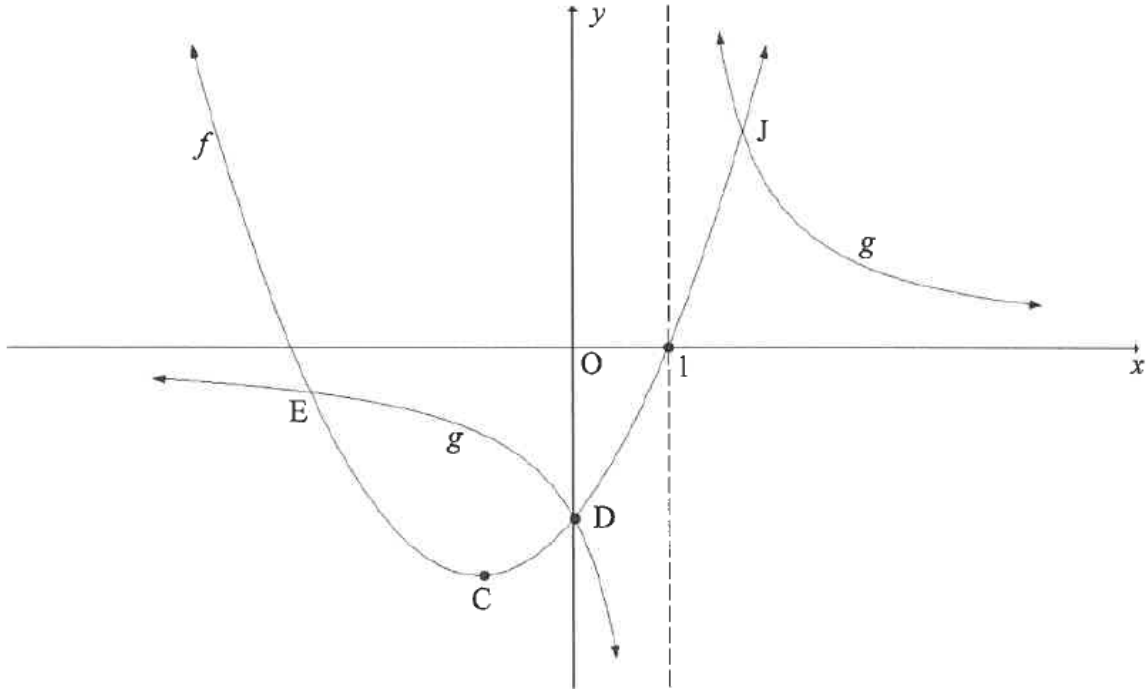


- 4.1 Toon aan dat die koördinate van C (7 ; 0) is.
- 4.2 Bereken die x – koördinaat van B.
- 4.3 Bepaal die vergelyking van f in die vorm $y = a(x - p)^2 + q$.
- 4.4 Bepaal die vergelyking van die grafiek van h , die refleksie van f in die x –as.
- 4.5 Gee die maksimum waarde van $t(x)$ as $t(x) = 1 - f(x)$.
- 4.6 Vir watter waarde(s) van x is $f(x) \geq 0$
- 4.7 Vir watter waarde(s) van x sal $f'(x) < 0$
- 4.8 Vir watter waarde(s) van x sal $f(x) < g(x)$

VRAAG 5 (GR12 NOV 2019 Vraag 4)

Hieronder is die grafieke van $f(x) = x^2 + bx - 3$ en $g(x) = \frac{a}{x+p}$

- f het 'n draaipunt by C en sny die x -as by $(1; 0)$
- D is die y -afsny van beide f en g . Die grafieke f en g sny mekaar ook by E en J .
- Die vertikale asimptoot van g gaan deur die x -afsny van f .



- 5.1 Skryf die waarde van p neer.
- 5.2 Toon aan dat $a = 3$ en $b = 2$.
- 5.3 Bereken die koördinate van C .
- 5.4 Gee die waardeversameling van f .
- 5.5 Bepaal die vergelyking van die lyn deur C wat 'n hoek van 45° met die positiewe x -as vorm. Gee jou antwoord in die vorm $y = \dots\dots$
- 5.6 Is die reguitlyn, wat in VRAAG 5.5 bepaal is, 'n raaklyn aan f ? Verduidelik jou antwoord.
- 5.7 Die funksie $h(x) = f(m - x) + q$ het slegs een x -afsny by $x = 0$. Bepaal die waardes van m en q .

GR 12 – CALCULUS

DIFFERENSIAALREKENE – OPSOMMING

Tipe Vraag	Opsomming van prosedure	Voorbeeld van vraag
1. Bepaal die limiet van eenvoudige funksies.	Verwyder die onbekende in noemer en vervang die waarde waarna geneig word in die uitdrukking.	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h-h^2}{h}$; $\lim_{a \rightarrow 6} \frac{a^2-36}{a-6}$
2. Bepaal die gemiddelde gradiënt tussen twee punte.	Benodig die koördinate van twee punte, gebruik formule om die gradiënt te bepaal	Indien $f(x) = 2x^3$, bepaal die gradient tussen $x = 1$ en $x = 2$
3. Bepaal die gradiënt by 'n punt.	Bepaal die afgeleide van die uitdrukking, vervang die x waarde van die punt	Indien $f(x) = 2x^3$, bepaal die gradient waar $x = 2$
4. Bepaal die afgeleide deur eerste beginsels.	Vanaf $f(x)$, bepaal $f(x+h)$ en gebruik die afgeide formule	Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = 2x^2$ vanaf eerste beginsels
5. Bepaal die afgeleide deur die gebruik van afgeleide reëls	Vereenvoudig die uitdrukking en bepaal die afgeleide. Let op na die uitleg van uitdrukking	Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{2}{x} - \sqrt{x} = 2(x+1)$
6. Gebruik van verskillende notasies vir die afgeleide.	Let op na die uitleg van uitdrukking	$f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, D_x , $\frac{dA}{dx}$, $\frac{ds}{dt}$
7. Bepaal die draaipunte en horisontale punte van infleksie van kurwes	Stel die afgeleide gelyk aan nul, en vervang terug in oorspronklike vergelyking.	$y = x^2 - 3x - 4$
8. Bepaal die x afsnitte van die kubiese krommes	Stel $y = 0$, los die vergelyking op. Raai 1 ^{ste} faktor, faktoriseer verder, benodig dalk formule kwadratiese vergelyking	Bepaal waar $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$ die x -as sny
9. Skets kubiese grafieke	Gebruik faktor stelling vir y afsnit, x afsnitte, en vir draaipunt stel afgeleide = 0, skets	Skets die grafiek $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$
10. Bepaal die infleksie punte.	Stel 2 ^{de} afgeleide = 0 en vervang x waarde terrug in oorspronklike vergelyking.	Bepaal die punt van infleksie tussen die 2 stasionêre punte van $y = x^3 - 5x^2 - 8x + 12$
11. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme.	$y = mx + c$, Vervang die x waarde in die afgeleide om m te bepaal. Vervang die x waarde in die oorspronklike vergelyking om 'n punt op die kurwe te kry. Gebruik die punt om c te bepaal.	Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme $y = 35x^2 - 4x + 1$ by die punt waar $x = 1$
12. Maksimeer en minimeer die lengtes, areas, volumes ens.	Bepaal 'n uitdrukking om die situasie voor te stel. Stel die afgeleide = 0, vervang x waarde terrug in die oorspronklike vergelyking.	

NOTA:

- Vrae in die hersiening is saamgestel uit vorige Nasionale eksamen vraestelle vir GR 12.

AFDELING A

VRAAG 1. Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels indien gegee

1.1 $f(x) = 3x^2 - 5$ (5)

1.2 $f(x) = -x^2 + 4$ (5)

1.3 $f(x) = \frac{4}{x}$ (5)

1.4 $f(x) = x^3$ (5)

VRAAG 2. Bepaal :

2.1 $\frac{dy}{dx}$ if $y = 2x^5 + \frac{4}{x^3}$ (3)

2.2 $\frac{dy}{dx}$ if $y = (\sqrt{x} - x^2)^2$ (4)

2.3 $\frac{dy}{dx}$ if $y = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2$ (3)

2.4 die afgeleide van $f(x) = \left(x - \frac{3}{x}\right)^2$ (3)

2.5 die afgeleide van $p(x) = \left(\frac{1}{x^3} + 4x\right)^2$ (4)

2.6 $D_x\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$ (3)

2.7 $D_x\left[\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}x\right]$ (3)

VRAAG 3.

3.1 As $y = (x^6 - 1)^2$, bewys dat $\frac{dy}{dx} = 12x^5\sqrt{y}$, as $x > 1$. (3)

3.2 Gegee: $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 1$. Bepaal die interval waarvoor f konkaf opwaarts is. (4)

3.3 $g(x) = -8x + 20$ is 'n raaklyn aan $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 18$ by $x = 1$. Bereken die waardes van a en b . (5)

VRAAG 4

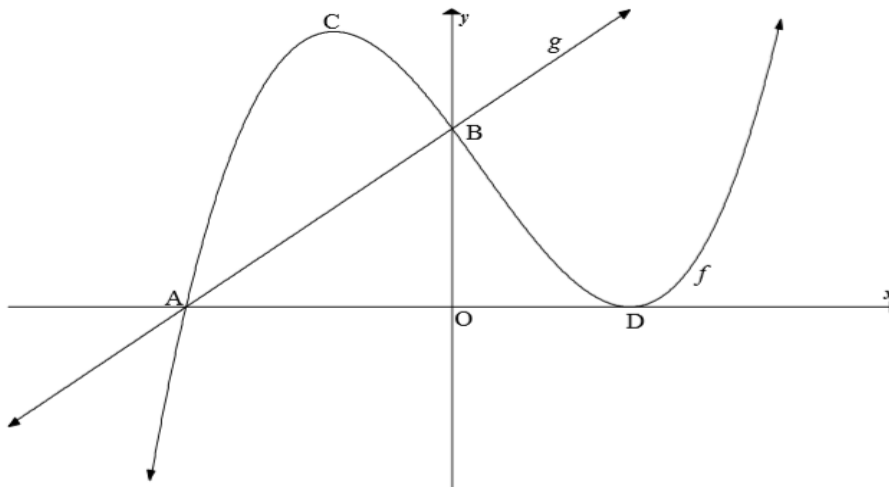
Gegee $f(x) = 2x^3 - 23x^2 + 80x - 84$

- 4.1 Bewys dat $(x - 2)$ 'n faktor van f is. (2)
- 4.2 Faktoriseer vervolgens of andersins $f(x)$ ten volle. (2)
- 4.3 Bepaal die x - koördinate van die draaipunt f . (4)
- 4.4 Skets die grafiek van f , en benoem ALLE draaipunte en sny punte met die asse duidelik. (3)
- 4.5 Bepaal die koördinate van die y - afsnit van die raaklyn aan f wat 'n helling van 40 het en wat f raak by 'n punt waar die x - koördinaat 'n heelgetal is. (6)

VRAAG 5

Die skets hieronder toon die grafieke van $f(x) = (x - a)^2(x - k)$ en $g(x) = mx + 12$.

- A en D is die x - afsnitte van f .
- B is die gemene y - afsnit van f en g .
- C en D is die draaipunte van f .
- Die reguitlyn g gaan deur A.



- 5.1 Skryf neer die y - koördinaat van B. (1)
- 5.2 Bepaal die x - koördinaat van A. (3)
- 5.3 Indien $k = -3$, bepaal die coördinate van C. (6)
- 5.4 Vir watter waardes van x sal f konkaaf afwaarts wees. (3)

VRAAG 6

Gegee : $h(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ en $g(x) = -12x$. P en Q(2; 10) is die draaipunte van h . Die grafiek van h gaan deur die oorsprong.

- 6.1 Toon aan dat $a = \frac{3}{2}$ en $b = 6$. (5)
- 6.2 Bepaal die gemiddelde gradiënt van h tussen P en Q, indien dit gegee word dat $x = -1$ by P? (4)
- 6.3 Toon aan dat die konkawiteit h verander by $x = \frac{1}{2}$. (3)
- 6.4 Verduidelik die betekenis van die verandering VRAAG 6.3 met betrekking tot h . (1)
- 6.5 Bepaal die waarde van x , gegee $x < 0$, waar die raaklyn aan h ewewydig aan g is. (4)

VRAAG 7

Gegee : $f(x) = (x + 2)(x^2 - 6x + 9)$
 $= x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

- 7.1 Bepaal die koördinate van die draaipunte van die grafiek f . (6)
- 7.2 Skets die grafiek van f , en benoem ALLE draaipunte en sny punte met die asse duidelik. (4)
- 7.3 Vir watter waardes van x sal $x \cdot f'(x) < 0$ (3)

VRAAG 8

Gegee : $f(x) = 3x^3$

- 8.1 Los op $f(x) = f'(x)$ (3)
- 8.2 Die grafieke f , f' en f'' , gaan almal deur die punt $(0; 0)$
- 8.2.1 Vir watter van die grafieke sal $(0; 0)$ 'n stasionêre punt wees. (1)
- 8.2.2 Verduidelik die verskil, indien enige, in die stasionêre punte waarna daar in VRAAG 8.2.1 verwys word. (2)
- 8.3 Bepaal die vertikale afstand tussen die grafieke van f' en f'' by $x = 1$ (3)
- 8.4 Vir watter waarde(s) van x is $f(x) - f'(x) < 0$ (4)

AFDELING B

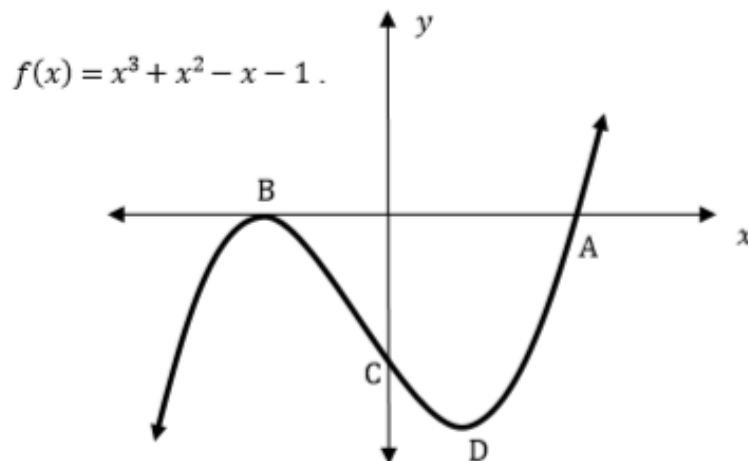
VRAAG 1.

1.1 Gebruik eerste beginsels en bepaal die waarde van $D_x\left(\frac{4x^3-x^4}{2x^2}\right)$, if $x = 2$ (8)

1.2 $f(x) = 4^x - 2^{x+3} - 128$ en $g(x) = 16x^{\frac{1}{2}}$ (9)

Bepaal die waarde van $g(x)$, if $f(x) = 0$

1.3 Die diagram hieronder toon die grafiek van $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$



1.3.1 Bepaal die afstand tussen A en B, die x -afsnitte. (5)

1.3.2 Bepaal die koördinate van D, 'n draaipunt van f . (3)

1.3.3 Toon aan dat die konkawiteit van f verander by $x = -\frac{1}{3}$ (3)

1.3.4 Vir watter waardes van x is:

a) $f(x) > 0$ (1)

b) $f(x) \cdot f'(x) < 0$ (3)

VRAAG 2.

2.1 Die grafiek van $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, waar a, b en c reële konstantes is het die volgende eienskappe :

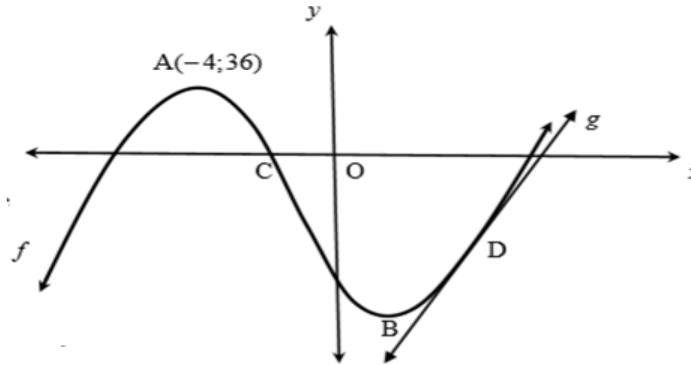
$$a > 0, d = 10$$

$$f(-2) = 0, f(2) = 0 \text{ en } f(4) = 0$$

$$f'(0) = 0, f'(3) = 0 \text{ en } f(3) = -3$$

Gebruik die gegewe informasie, trek 'n skets van die grafiek van f . Dui al die afsnitte met die asse en die draaipunte duidelik aan. (6)

- 2.2 Die funksie gedefinieer deur $f(x) = x^3 + px + qx - 12$ is hieronder geskets. A(-4;36) en B is die draaipunte van f . g is 'n raaklyn aan die grafiek by D.



- 2.2.1 Toon aan dat $p = 5$ en $q = -8$. (6)
- 2.2.2 As C(-1 ; 0) 'n x - afsnit van f is, bereken die ander x - afsnit van f . (4)
- 2.2.3 Bepaal die vergelyking van g , die raaklyn aan f by D(1 ; -14). (4)
- 2.2.4 Vir watter waardes van k sal $f(x) = g(x) + k$ twee positiewe oplossings hê. (2)

VRAAG 3.

Gegee : $f(x) = x(x - 3)^2$ met $f'(1) = f'(3) = 0$ en $f(1) = 4$

- 3.1 Toon aan dat f 'n infleksie punt by $x = 2$ (5)
- 3.2 Skets die grafiek van f , en dui al die draaipunte en sny punte met die asse duidelik aan. (4)
- 3.3 Vir watter waardes van x is $y = -f(x)$ konkaf af. (2)
- 3.4 Gebruik jou grafiek om die volgende vrae te beantwoord:
- 3.4.1 Bepaal die koördinate van die lokale maksimum van h as $h(x) = f(x - 2) + 3$ (2)
- 3.4.2 Claire beweer dat $f'(2) = 1$. (2)
Stem jy saam met Claire? Motiveer jou antwoord.

VRAAG 4.

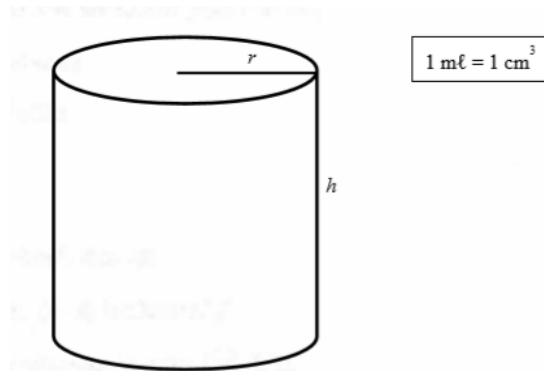
'n Maraton-atleet oefen tussen twee dorpe A en C. Hy begin by punt B wat tussen dorpe A en C lê. Die atleet loop van punt B na dorp C en dan weer terug na punt B. Die pad tussen die dorpe is 'n reguit lyn. Die verplasing S , in kilometer, vanaf punt B in t ure, word gegee deur :

$$S(t) = -t^3 + 12t^2 - 32t$$

- 4.1 Hoeveel ure neem die atleet om terug te keer na punt B. (3)
- 4.2 Bepaal die afstand tussen punt B en dorp C. (5)
- 4.3 Bereken die maksimum snelheid wat die atleet tydens oefening bereik het (4)

VRAAG 5.

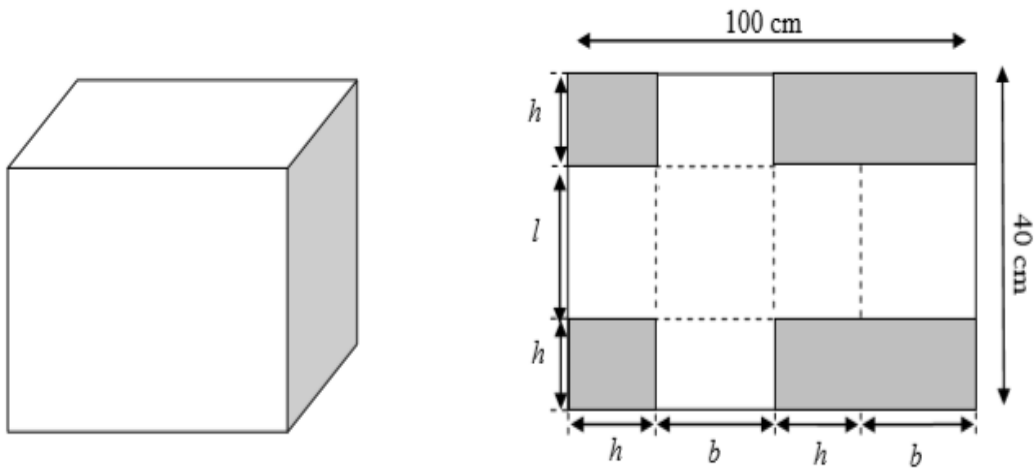
'n 340 ml blikkie met hoogte h cm en radius r cm word hieronder getoon.



- 5.1 Bereken die hoogte van die blikkie in terme van die radius r . (3)
- 5.2 Bereken die radius van die blikkie, in cm, indien die buite-oppervlak 'n minimum moet wees. (6)

VRAAG 6.

'n Boks word van 'n reghoekige stuk karton gemaak, 100 cm by 40 cm, deur die ingekleurde dele uit te sny en op die stippellyne, soos in die diagram hierbo aangedui, te vou.



- 6.1 Druk die lengte l in terme van die hoogte h uit. (1)
- 6.2 Bewys gevolglik dat die volume van die boks gegee word deur $V = h(50 - h)(40 - 2h)$ (3)
- 6.3 Vir watter waarde van h sal die volume van die boks 'n maksimum wees. (5)